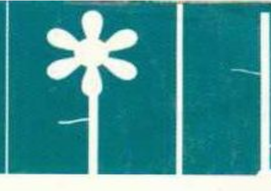
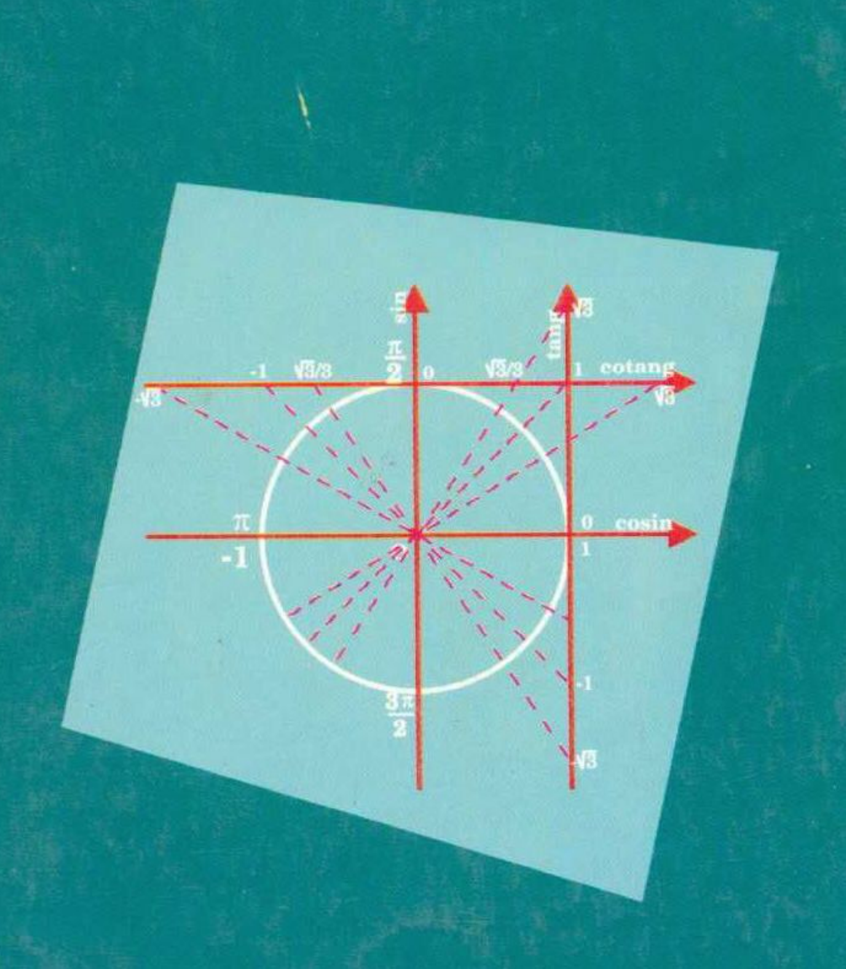
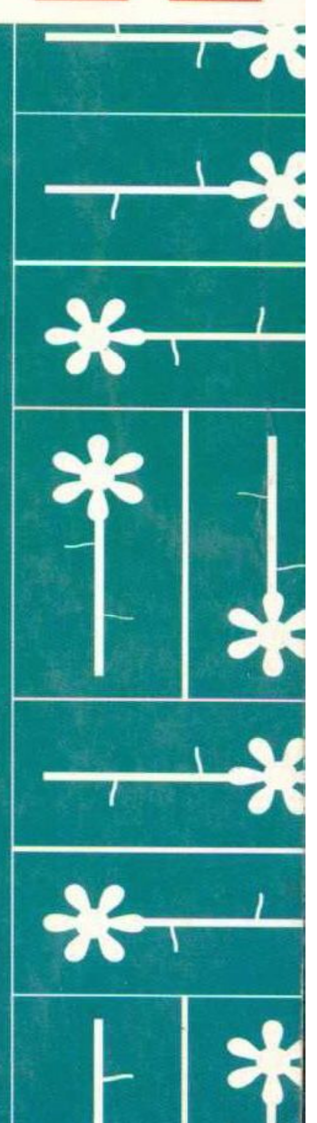


LÊ HỒNG ĐỨC - LÊ BÍCH NGỌC

Toán nâng cao TỰ LUẬN & TRẮC NGHIỆM LƯỢNG GIÁC 11





NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ HỒNG ĐỨC – LÊ BÍCH NGỌC

TOÁN NÂNG CAO

TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

LƯỢNG GIÁC 11

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỞ ĐẦU

Sự ưu việt của phương pháp thi trắc nghiệm đã và đang được chứng minh từ những nước có nền giáo dục tiên tiến trên thế giới bởi những ưu điểm như tính khách quan, tính bao quát và tính kinh tế.

Trong thời gian không xa, theo chủ trương của BGD&ĐT các trường đại học, cao đẳng và trung học chuyên nghiệp sẽ chuyển sang hình thức tuyển sinh bằng phương pháp trắc nghiệm. Và để có được thời gian chuẩn bị tốt nhất, các bài kiểm tra kiến thức trong chương trình THCS và THPT cũng sẽ có phần trắc nghiệm để các em học sinh làm quen.

Tuy nhiên, việc biên soạn các câu hỏi trắc nghiệm cần tuân thủ một số yêu cầu cơ bản về mặt lí luận sư phạm và ý nghĩa đích thực của các số liệu thống kê. Ngoài ra, một đề thi môn toán được chấm hoàn toàn dựa trên kết quả trắc nghiệm chắc chắn sẽ chưa phù hợp với hiện trạng giáo dục của nước ta bởi nhiều lí do, từ đó dẫn tới việc không đảm bảo được tính khách quan trong việc đánh giá kết quả học tập của học sinh. Để khắc phục nhược điểm này Nhóm Cự Môn chúng tôi đề xuất hướng thực hiện như sau:

1. *Với mỗi đề thi hoặc đề kiểm tra vẫn tuân thủ đúng cấu trúc chung và điểm trắc nghiệm không quá 3.5 điểm.*
2. *Trong những câu hỏi có phần trắc nghiệm sẽ được hiểu là **"trắc nghiệm và tự luận"**. Ở đây các em học sinh sẽ phải lựa chọn một trong bốn đáp số và cần biết rằng số điểm a của câu hỏi này được chia làm đôi:*

- *Nếu lựa chọn đúng lời giải trắc nghiệm sẽ nhận được* $\frac{a}{2}$ *điểm.*
- *Nếu thực hiện đúng lời giải tự luận cho câu hỏi sẽ nhận được* $\frac{a}{2}$ *điểm còn lại.*

Đây chính là yếu tố để đảm bảo tính khách quan bởi:

1. *Với những học sinh chỉ mò mẫm đáp án hoặc nhận được nó thông qua những yếu tố xung quanh sẽ chỉ nhận được tối đa* $\frac{a}{2}$ *điểm với xác suất 25%.*
2. *Với những học sinh hiểu được nội dung câu hỏi từ đó định hướng được các phép thử bằng tay hoặc bằng máy tính fx – 570MS chắc chắn sẽ nhận được* $\frac{a}{2}$ *điểm.*
3. *Với những học sinh khá hơn biểu hiện bằng việc hiểu được nội dung câu hỏi và có thể thực hiện được một phần câu hỏi này dưới dạng tự luận sẽ nhận được khoảng* $\frac{a}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$ *điểm.*
4. *Cuối cùng, với những học sinh biết cách thực hiện câu hỏi dưới dạng tự luận sẽ nhận được a điểm.*

Dựa trên tư tưởng này, Nhóm Cự Môn dưới sự phụ trách của Lê Hồng Đức xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ sách:

TOÁN NÂNG CAO TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM THPT

Bộ sách này sẽ cung cấp cho bạn đọc một ngân hàng bài tập tự luận và trắc nghiệm môn toán THPT có chất lượng theo đúng thứ tự của chương trình Toán PTTH bởi về hình thức bạn đọc sẽ nhận thấy rằng bộ sách này chính là những cuốn sách giải bài tập của bộ sách ***Học và Ôn tập Toán*** *(được viết theo lớp 10, 11, 12) do NXB Đại học Quốc gia Hà Nội ấn hành.*

Cuốn **LƯỢNG GIÁC** *được biên soạn theo đúng thứ tự của chương trình Lượng giác cấp PTTH và được chia thành 2 chương:*

Chương I: Hàm số lượng giác

Chương II: Phương trình và hệ phương trình lượng giác

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Địa chỉ: Nhóm tác giả Cự Môn do Lê Hồng Đức phụ trách

Số nhà 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội

Điện thoại: (04) 7196671 hoặc 0893046689

E-mail: cumon@hn.vnn.vn hoặc lehongduc39@yahoo.com.

Hà Nội, ngày 1 tháng 5 năm 2006

NHÓM CỰ MÔN – LÊ HỒNG ĐỨC

CHƯƠNG I
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

CHỦ ĐỀ 1
GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. SỬ DỤNG ĐƯỜNG TRÒN LƯỢNG GIÁC

Đường tròn lượng giác là đường tròn định hướng có bán kính bằng 1, trên đó có điểm A gọi là điểm gốc.

- Trục hoành tương ứng với trục giá trị của cosin.
- Trục tung tương ứng với trục giá trị của sin.
- Đường thẳng đi qua điểm A(1, 0) và vuông góc với trục cos tương ứng với trục giá trị của tang.
- Đường thẳng đi qua điểm B(0, 1) và vuông góc với trục sin tương ứng với trục giá trị của cotang.

2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG ĐẶC BIỆT

Độ do / Hàm	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	‖	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$cotg\alpha$	‖	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	‖

3. DẤU CỦA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

Ta có các kết quả sau:

Độ đo / Hàm số lượng giác	$0 < \alpha < 90^0$	$90^0 < \alpha < 180^0$
$\cos\alpha$	+	–
$\sin\alpha$	+	+
$tg\alpha$	+	–
$cotg\alpha$	+	–

4. CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

a. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

b. $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

c. $cotg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

d. $tg\alpha.cotg\alpha = 1$

e. $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha$

f. $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + cotg^2\alpha$

5. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG ĐỐI NHAU

a. $\sin(-x) = -\sin x$

b. $\cos(-x) = \cos x$

c. $tg(-x) = -tgx$

d. $cotg(-x) = -cotgx$

6. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG BÙ NHAU

a. $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$

b. $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$

c. $tg(180^0 - \alpha) = -tg\alpha$

d. $cotg(180^0 - \alpha) = -cotg\alpha$

7. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG PHỤ NHAU

a. $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$

b. $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$

c. $tg(90^0 - \alpha) = cotg\alpha$

d. $cotg(90^0 - \alpha) = tg\alpha$

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Tính giá trị của biểu thức lượng giác chứa các cung đặc biệt.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng:

1. Các hệ quả trong bảng giá trị lượng giác của các cung đặc biệt.
2. Các tính chất sau với $k \in \mathbb{Z}$

(i). $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi)$ và $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2k\pi)$.

(ii). $tg\alpha = tg(\alpha + k\pi)$ và $cotg\alpha = cotg(\alpha + k\pi)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = 8 - \cos^2 30^0 + 2\sin^2 45^0 - \sqrt{3}\,tg^3 60^0$.

□ $A = -\dfrac{3}{4}$. □ $A = \dfrac{1}{4}$. □ $A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. □ $A = 0$.

b. $B = (a^2 + 1).\sin 0^0 + b.\cos 90^0 + c.\cos 180^0$.

□ $B = a^2 + 1$. □ $B = a^2 + b$. □ $B = -c$. □ $B = b + c$.

Bài tập 2: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = 4\sin^4 135^0 + \sqrt{3}\cos^3 150^0 - 3cotg^2 120^0$.

□ $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. □ $A = -\dfrac{9}{8}$. □ $A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. □ $A = 2\sqrt{2}$.

b. $B = 4\cos^4 135^0 - 8\sin^3 150^0 - 3(tg^2 120^0 - tg^4 135^0)$.

❑ $B = 2\sqrt{2}$. ❑ $B = 4\sqrt{3}$. ❑ $B = -6$. ❑ $B = 0$.

Bài tập 3: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \dfrac{a^2.\sin 180^0 - b^3\sqrt{2}.\sin 135^0 - 2ab^2.\cos 150^0}{a.\cot g150^0 - b.\cos 0^0 + 2atg60^0}$.

❑ $A = a^2 + 1$. ❑ $A = a^2 + b^2$. ❑ $A = b^2$. ❑ $A = a + b$.

b. $B = \dfrac{a^2 \sin 90^0 - b^2 \cos 0^0}{a.\cot g45^0 + b.\cos 180^0 - 2a.\cot g90^0}$.

❑ $B = a^2$. ❑ $B = a^2 - b^2$. ❑ $B = b^2 - 1$. ❑ $B = a + b$.

Bài toán 2: Dấu của biểu thức lượng giác .

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta xác định điểm ngọn của góc thuộc cung phần tư nào trên đường tròn đơn vị, từ đó sử dụng các hệ quả trong bảng dấu của các giá trị lượng giác.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 4: Xác định dấu của các biểu thức:

a. $A = \cos 195^0.tg269^0.\cot g(-98^0)$.

❑ $A > 0$. ❑ $A < 0$.

b. $B = \sin(-1441^0).\cos 1080^0.\ tg908^0.\cot g(-1972^0)$.

❑ $B > 0$. ❑ $B < 0$.

Bài tập 5: Cho $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \backslash \{\frac{\pi}{4}\}$. Xác định dấu của các biểu thức:

a $A = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}).\cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$.

❑ $A > 0$. ❑ $A < 0$.

b $B = tg2\alpha.\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$.

❑ $B > 0$. ❑ $B < 0$.

Bài tập 6: Cho $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{6}$. Xác định dấu của biểu thức:

$$A = \frac{\cos 2\alpha.\sin(2\alpha + \frac{\pi}{2})}{tg(\alpha + \frac{\pi}{3})}.$$

❑ $A > 0$. ❑ $A < 0$.

Bài tập 7: Cho ΔABC, xác định dấu của các biểu thức:

a. $S_1 = \sin A + \sin B + \sin C$.

❑ $S_1 > 0$. ❑ $S_1 < 0$.

b. $S_2 = \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}$.

- ❑ $S_2 > 0$.
- ❑ $S_2 < 0$.

Bài tập 8: Cho ΔABC , xác định dấu của các biểu thức:

$$S = tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2}.$$

- ❑ $S > 0$.
- ❑ $S < 0$.

Bài tập 9: Tìm $k \in \mathbf{Z}$, sao cho:

a. $\sin(\frac{\pi}{4} + k\pi) > 0$.

- ❑ k chẵn.
- ❑ k lẻ.

b. $\cos(\frac{\pi}{3} - k\pi) < 0$.

- ❑ k chẵn.
- ❑ k lẻ.

Bài toán 3: Rút gọn biểu thức lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng các hằng đẳng thức lượng giác.

Cần lưu ý rằng việc rút gọn biểu thức trong nhiều trường hợp là công việc cần thiết nhất trước khi thực hiện việc tính giá trị của biểu thức.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 10: Rút gọn biểu thức:

a. $A = \frac{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha.tg^2\alpha}{\cos^2\alpha + \cos^2\alpha.\cot g^2\alpha}$.

- ❑ $A = \sin^4\alpha$.
- ❑ $A = \cos^4\alpha$.
- ❑ $A = tg^4\alpha$.
- ❑ $A = cotg^4\alpha$.

b. $B = (1 + cotg\alpha + \frac{1}{\sin\alpha})(1 + cotg\alpha - \frac{1}{\sin\alpha})$.

- ❑ $B = tg\alpha$.
- ❑ $B = 2tg\alpha$.
- ❑ $B = cotg\alpha$.
- ❑ $B = 2cotg\alpha$.

Bài tập 11: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.\left[\frac{(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha} - 1\right].$$

- ❑ $B = tg\alpha$.
- ❑ $B = 2tg\alpha$.
- ❑ $B = cotg\alpha$.
- ❑ $B = 2cotg\alpha$.

Bài tập 12: Rút gọn biểu thức:

a. $A = \frac{1}{\sin\alpha - \sqrt{\cot g^2\alpha - \cos^2\alpha}}$, với $\alpha \in (\pi, 2\pi)$.

- ❑ $A = \sin\alpha$.
- ❑ $A = \cos^2\alpha$.
- ❑ $A = tg\alpha$.
- ❑ $A = cotg^2\alpha$.

b. $B = \sqrt{(1+tg\alpha).\cos^2\alpha + (1+\cot g\alpha).\sin^2\alpha}$, với $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

- ❑ $B = \cos\alpha + \sin\alpha$.
- ❑ $B = \sin\alpha - \cos\alpha$.
- ❑ $B = \cos\alpha - \sin\alpha$.
- ❑ $B = -\cos\alpha - \sin\alpha$.

Bài tập 13: Rút gọn biểu thức:

a. $A = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{\cot g\alpha + \cot g\beta}$.

☐ $A = tg\alpha.tg\beta$. ☐ $A = tg\alpha.cotg\beta$.
☐ $A = cotg\alpha.cotg\beta$. ☐ $A = cotg\alpha.tg\beta$.

b. $B = \dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha.\sin^2\beta} - cotg^2\alpha.cotg^2\beta$.

☐ $B = -1$. ☐ $B = 0$. ☐ $B = 1$. ☐ $B = \cos\alpha$.

Bài toán 4: Chứng minh đẳng thức lượng giác đơn giản.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng hệ thức cơ bản và các hệ quả để thực hiện các phép biến đổi tương đương. Khi đó ta lựa chọn theo các hướng sau:

Hướng 1: Biến đổi VT thành VP hoặc ngược lại, trong trường hợp này thông thường ta lựa chọn việc biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản.

Hướng 2: Biến đổi đẳng thức về một đẳng thức luôn đúng.

Hướng 3: Xuất phát từ một đẳng thức đúng, biến đổi thành đẳng thức cần chứng minh.

Hướng 4: Biến đổi đồng thời VT và VP tới một biểu thức trung gian.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 14: Chứng minh rằng:

a. $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

b. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Bài tập 15: Chứng minh rằng:

a. $(1 + tg\alpha)(1 + cotg\alpha)\sin\alpha.\cos\alpha = 1 + 2\sin\alpha.\cos\alpha$.

b. $(1 + tg\alpha)(1 + cotg\alpha)\sin\alpha.\cos\alpha = (1 + tg\alpha)\cos^2\alpha + (1 + cotg\alpha)\sin^2\alpha$.

Bài tập 16: Chứng minh rằng:

a. $\dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$.

b. $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{1 - \cos\alpha} = \dfrac{2\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha + 1}$.

c. $\dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}\left[\dfrac{(1 + \cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha} - 1\right] = 2cotg\alpha$.

d. $\dfrac{1}{1 + tg\alpha} + \dfrac{1}{1 + \cot g\alpha} = 1$.

Bài tập 17: Chứng minh rằng:

a. $\frac{tg\alpha - \sin\alpha}{\sin^3\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha(1+\cos\alpha)}$.

b. $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cot g\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{1+tg\alpha} = 1 - \sin\alpha.\cos\alpha$.

Bài tập 18: Chứng minh rằng:

a. $\left(\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right)^2 = 4tg^2\alpha$.

b. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \frac{1+\cot g^2\alpha}{1-\cot g^2\alpha}$.

Bài tập 19: Chứng minh rằng:

a. $\frac{tg\alpha + tg\beta}{\cot g\alpha + \cot g\beta} = tg\alpha.tg\beta$.

b. $\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha.\sin^2\beta} = \frac{tg^2\alpha - tg^2\beta}{tg^2\alpha.tg^2\beta}$.

Bài tập 20: Cho $\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 1$. Chứng minh rằng:

$$tg^2a.tg^2b + tg^2b.tg^2c + tg^2c.tg^2a = 1 - 2\,tg^2a.tg^2b.tg^2c.$$

Bài tập 21: Cho:

$$\begin{cases} a = \sin\alpha \\ b = \cos\alpha.\sin\beta \\ c = \cos\alpha.\cos\beta \end{cases}.$$

a. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

b. Hãy tổng quát hoá cho n số $a_1, a_2, ..., a_n$.

Bài toán 5: Biểu thức lượng giác độc lập đối với biến.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện việc rút gọn biểu thức lượng giác về dạng hằng số.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 22: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α:

a. $A = \sin^8\alpha + \cos^8\alpha - 2(1 - \sin^2\alpha.\cos^2\alpha)^2$.

b. $B = 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$.

Bài tập 23: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α:

a. $A = \sin^4\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$.

b. $B = \sin^8\alpha + \cos^8\alpha - 2(\sin^4\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha + \cos^4\alpha)^2$.

Bài tập 24: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α:

a. $A = (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1)(tg^2\alpha + \cot g^2\alpha + 2)$

b. $B = \frac{(1-tg^2\alpha)^2}{tg^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}$.

c. $C = \dfrac{tg^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \dfrac{cotg^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

d. $D = \dfrac{1 - \sin^6\alpha}{\cos^6\alpha} - \dfrac{3tg^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Bài tập 25: Cho biểu thức:

$$A = a(\cos^8\alpha - \sin^8\alpha) + 4(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) + b.\sin^4\alpha.$$

Xác định a, b để A không phụ thuộc vào α, khi đó hãy tính giá trị của A.

- ❑ $a = 3$ và $b = 6$.
- ❑ $a = -3$ và $b = 6$.
- ❑ $a = -3$ và $b = -6$.
- ❑ $a = 3$ và $b = -6$.

Bài toán 6: Tính giá trị của biểu thức lượng giác .

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng hệ thức cơ bản và các hệ quả (xét minh hoạ với $0^o \le \alpha \le 180^o$):

Dạng 1: Giả sử biết cosα, ta được:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha},$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \ cotg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \text{ hoặc } cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}.$$

Dạng 2: Giả sử biết sinα, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $0^o \le \alpha \le 90^o$, thì cosα, tgα, cotgα ≥ 0 do đó:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha},$$

$$cotg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\text{hoặc } \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + cotg^2\alpha \Rightarrow cotg\alpha = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1}.$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ hoặc } tg\alpha = \frac{1}{cotg\alpha}.$$

Trường hợp 2: Nếu $90^o \le \alpha \le 180^o$, thì cosα, tgα, cotgα ≤ 0 do đó:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha},$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \ cotg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \text{ hoặc } cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}.$$

Dạng 3: Giả sử biết tgα, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $tg\alpha \ge 0 \Leftrightarrow 0^o \le \alpha \le 90^o$, thì cosα, sinα, cotgα ≥ 0 do đó:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}},$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha = tg\alpha.\cos\alpha, \ cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}.$$

Trường hợp 2: Nếu tgα ≤ 0 ⇔ 90° ≤ α ≤ 180°, thì cosα, tgα, cotgα ≤ 0 do đó:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}},$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \sin\alpha = tg\alpha.\cos\alpha,\ cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}.$$

Dạng 4: Giả sử biết cotgα, tương tự dạng 3.

Dạng 5: Giả sử biết giá trị của một biểu thức lượng giác, cần tính giá trị của các hàm số lượng giác của một góc α, ta lựa chọn một trong các hướng sau:

Hướng 1: Biến đổi biểu thức lượng giác về dạng chỉ chứa một hàm lượng giác rồi thực hiện phép đặt ẩn phụ (nếu cần) để giải một phương trình đại số.

Hướng 2: Biến đổi biểu thức lượng giác về dạng tích A.B = 0.

Hướng 3: Sử dụng bất đẳng thức để phép đánh giá.

Dạng 6: Giả sử biết giá trị của một biểu thức lượng giác (ký hiệu (1)), cần tính giá trị của biểu thức lượng giác khác (ký hiệu (2)), ta lựa chọn một trong các hướng sau:

Hướng 1: Biến đổi (1) rồi thay vào (2).

Hướng 2: Biến đổi (2) rồi sử dụng (1).

Hướng 3: Biến đổi đồng thời (1) và (2) dẫn tới biểu thức trung gian (3).

Hướng 4: Sử dụng phương pháp giải phương trình để tính các giá trị đơn.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 26: Biết $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$ với 90° < α < 180°.

a. Tính sinα, tgα.

❑ $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $tg\alpha = -1$. ❑ $\sin\alpha = \frac{15}{17}$, $tg\alpha = -\frac{8}{15}$.

❑ $\sin\alpha = \frac{17}{15}$, $tg\alpha = -\frac{17}{8}$. ❑ $\sin\alpha = \frac{15}{17}$, $tg\alpha = -\frac{15}{8}$.

b. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{5\cot g\alpha + 4tg\alpha}{5\cot g\alpha - 4tg\alpha}$.

❑ A = −5. ❑ A = 4. ❑ $A = -\frac{21}{19}$. ❑ $A = -\frac{61}{29}$.

Bài tập 27: Biết $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ với $0^0 < \alpha < 90^0$, tính giá trị của biểu thức:

$$B = \text{cotg}\alpha + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

- ❑ $B = 2(\sqrt{2}+1)$. ❑ $B = \sqrt{2} - 1$.
- ❑ $B = 2(\sqrt{2}-1)$. ❑ $B = 2(1-\sqrt{2})$.

Bài tập 28: Biết $\text{cotg}\alpha = 3$.

a. Tính $\cos\alpha$, $\sin\alpha$.

- ❑ $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ và $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. ❑ $\cos\alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ và $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.
- ❑ $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ và $\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. ❑ $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ và $\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

b. Tính giá trị của biểu thức $C = \dfrac{1}{\cos^2\alpha - \cos\alpha.\sin\alpha + \sin^2\alpha}$.

- ❑ $C = \dfrac{10}{7}$. ❑ $C = \dfrac{11}{9}$. ❑ $C = \dfrac{12}{11}$. ❑ $C = 1$.

Bài tập 29: Biết $\text{tg}\alpha + 2\text{cotg}\alpha = 3$. Tính $\text{tg}\alpha$, $\text{cotg}\alpha$.

- ❑ $\text{tg}\alpha = \text{cotg}\alpha = -1$ hoặc $\text{tg}\alpha = 4$ và $\text{cotg}\alpha = -\dfrac{1}{2}$
- ❑ $\text{tg}\alpha = \text{cotg}\alpha = -1$ hoặc $\text{tg}\alpha = 2$ và $\text{cotg}\alpha = \dfrac{1}{2}$.
- ❑ $\text{tg}\alpha = \text{cotg}\alpha = 1$ hoặc $\text{tg}\alpha = 4$ và $\text{cotg}\alpha = -\dfrac{1}{2}$.
- ❑ $\text{tg}\alpha = \text{cotg}\alpha = 1$ hoặc $\text{tg}\alpha = 2$ và $\text{cotg}\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Bài tập 30: Biết $\sin^2\alpha.\cos^2\alpha = \dfrac{1}{4}$, với $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

a. Tính $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\text{tg}\alpha$, $\text{cotg}\alpha$.

- ❑ $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\cos\alpha = 1$ và $\text{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\text{cotg}\alpha = 2$.
- ❑ $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ và $\text{tg}\alpha = 2$, $\text{cotg}\alpha = \dfrac{1}{2}$.
- ❑ $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $\text{tg}\alpha = \text{cotg}\alpha = -1$.
- ❑ $\sin\alpha = \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $\text{tg}\alpha = \text{cotg}\alpha = 1$.

b. Tính giá trị của biểu thức $G = \sin^4\alpha + \cos^2\alpha$.

□ $G = 1$. □ $G = \frac{1}{4}$. □ $G = \frac{17}{16}$. □ $G = \frac{3}{4}$.

Bài tập 31: Biết $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}$, với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

a. Tính cosα, sinα, tgα, cotgα.

□ $\sin\alpha = \sqrt{2}$, $\cos\alpha = 0$ và $\text{tg}\alpha = \sqrt{2}$, $\text{cotg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

□ $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = -\sqrt{2}$ và $\text{tg}\alpha = 0$, $\text{cotg}\alpha = \infty$.

□ $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\text{tg}\alpha = \text{cotg}\alpha = -1$.

□ $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\text{tg}\alpha = \text{cotg}\alpha = 1$.

b. Tính giá trị của biểu thức $F = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.

□ $F = 1$. □ $F = 8$. □ $F = \frac{1}{4}$. □ $F = \frac{1}{8}$.

Bài tập 32: Biết $\sin\alpha + \cos\alpha = m$, tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \cos\alpha.\sin\alpha$.

□ $A = \frac{m}{2}$. □ $A = \frac{m^2}{2}$. □ $A = \frac{1 - m^2}{2}$. □ $A = \frac{m^2 - 1}{2}$.

b. $B = \cos^4\alpha + \sin^4\alpha$.

□ $B = m^4$. □ $B = m^2 - 2$.

□ $B = \frac{1 + 2m^2 - m^4}{2}$. □ $B = \frac{m^4 - 2m^2 - 1}{2}$.

c. $C = \text{tg}^2\alpha + \text{cotg}^2\alpha$.

□ $C = \frac{4 - 2m^2}{m^2}$. □ $C = \frac{2(m^4 - 2m^2 - 1)}{(m^2 - 1)^2}$.

□ $C = \frac{4 - 2m^4}{m^4}$. □ $C = \frac{2(1 + 2m^2 - m^4)}{(m^2 - 1)^2}$.

d. $D = \frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\text{tg}^2\alpha - 1}$.

□ $D = m$. □ $D = 2m$. □ $D = m - 1$. □ $D = m + 1$.

Bài tập 33: Tính cosα, sinα, tgα, cotgα, biết:

a. $a.\sin\alpha + b.\cos\alpha = 0$, với $a^2 + b^2 \neq 0$.

b. $\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right)\sin\alpha + \left(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\right)\cos\alpha = 2 + \sqrt{2}$.

c. $5\sin\alpha - 20\cos\alpha = 4(\text{tg}\alpha - 4)$.

d. $49 - 50\sin\alpha.\cos\alpha = 12(\text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha)$, với $0 < \alpha < 90^0$.

Bài tập 34: Biết $3\sin^4\alpha + 2\cos^4\alpha = \frac{98}{81}$, tính:

$$A = 2\sin^4\alpha + 3\cos^4\alpha.$$

Bài toán 7: Góc phụ, bù nhau.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng các hệ quả:

Hàm số lượng giác của hai góc bù nhau

a. $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$.

b. $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$.

c. $tg(180^0 - \alpha) = -tg\alpha$.

d. $cotg(180^0 - \alpha) = -cotg\alpha$.

Hàm số lượng giác của hai góc phụ nhau

a. $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$.

b. $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$.

c. $tg(90^0 - \alpha) = cotg\alpha$.

d. $cotg(90^0 - \alpha) = tg\alpha$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 35: Biết $\sin\alpha = \frac{6}{7}$, với $90^0 < \alpha < 180^0$, tính giá trị các hàm số lượng giác của góc $180^0 - \alpha$.

Bài tập 36: Biết $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, tính giá trị các hàm số lượng giác của các góc $90^0 - \alpha$ và $180^0 - \alpha$.

Bài tập 37: Biết $tg\alpha = \frac{5}{4}$, tính giá trị các hàm số lượng giác của các góc $90^0 - \alpha$ và $180^0 - \alpha$.

Bài tập 38: Biết $cotg\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, tính giá trị các hàm số lượng giác của $180^0 - \alpha$.

Bài tập 39: Rút gọn biểu thức:

a. $A = 2[\sin^6\alpha + \sin^6(90^0 - \alpha)] - 3[\sin^4(180^0 - \alpha) + \cos^4\alpha + 2]$.

□ $A = -7$. □ $A = 1$. □ $A = \cos^2\alpha$. □ $A = \sin^2\alpha$.

b. $B = \frac{1 - \sin^2(180^0 - \alpha)}{1 - \sin^2(90^0 - \alpha)} - cotg(90^0 - \alpha).cotg(180^0 - \alpha)$.

□ $B = \frac{1}{\sin\alpha}$. □ $B = \frac{1}{\cos\alpha}$. □ $B = \frac{1}{\cos^2\alpha}$. □ $B = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

c. $C = \frac{[\sin(-954^0) - \cos 1296^0].tg36^0}{\sin 504^0 - \cos(-234^0)}$.

□ $C = 0$. □ $C = 1$. □ $C = -1$. □ $C = -2$.

Bài tập 40: Rút gọn biểu thức:

a. $A = \sin^6(\alpha + \pi) + \cos^6(\alpha - \pi) - 2\sin^4(\alpha + 2\pi) - \sin^4(\alpha + \frac{3\pi}{2}) + \cos^2(\alpha - \frac{\pi}{2})$.

❑ $A = -2$. ❑ $A = -1$. ❑ $A = 0$. ❑ $A = 1$.

b. $B = [1 + tg^2(\alpha - \frac{9\pi}{2})][1 + cotg^2(\alpha - 5\pi)]$.

$\cos(\alpha + \frac{7\pi}{2}).\sin(3\pi - \alpha).\cos(\alpha - \frac{11\pi}{2}).\sin(\alpha - 7\pi)$.

❑ $B = 0$. ❑ $B = 1$. ❑ $B = 2$. ❑ $B = 6$.

Bài tập 41: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc α:

a. $A = \cos^4(180^0 - \alpha) + \sin^2(180^0 - \alpha).\sin^2(90^0 - \alpha) + \cos^2(90^0 - \alpha)$.

b. $B = \frac{[1 - \cot g^2(180^0 - \alpha)]^2}{tg^2(90^0 - \alpha)} - \frac{1}{\sin^2(180^0 - \alpha).\sin^2(90^0 - \alpha)}$.

Bài tập 42: Tính các tổng:

a. $S = \cos20^0 + \cos40^0 + ... + \cos160^0 + \cos180^0$.

❑ $S = -1$. ❑ $S = 0$. ❑ $S = 1$. ❑ $S = 4$.

b. $S = tg10^0 + tg30^0 + tg50^0 + tg70^0 + tg110^0 + tg130^0 + tg150^0 + tg170^0$.

❑ $S = 0$. ❑ $S = 5$. ❑ $S = 10$. ❑ $S = 20$.

c. $S = \sin^2 1^0 + \sin^2 2^0 + ... + \sin^2 180^0$.

❑ $S = 180$. ❑ $S = 90$. ❑ $S = 45$. ❑ $S = 1$.

d. $S = \cos^2 2^0 + \cos^2 4^0 + ... + \cos^2 90^0$.

❑ $S = 90$. ❑ $S = 45$. ❑ $S = 22$. ❑ $S = 1$.

Bài tập 43: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \cos(\frac{\pi}{6} + k\pi)$, với $k \in \mathbb{Z}$.

b. $B = cotg(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3})$, với $k \in \mathbb{Z}$.

c. $C = \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}).tg(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})$, với $k \in \mathbb{Z}$.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. $A = -\frac{3}{4}$. b. $B = -c$.

Bài tập 2.

a. $A = -\frac{9}{8}$. b. $B = -6$.

Bài tập 3.

a. $A = b^2$. b. $B = a + b$.

Bài tập 4.

a. $A < 0$. b. $B < 0$.

Bài tập 5.

a. $A > 0$. b. $B < 0$.

Bài tập 6. $A > 0$.

Bài tập 7.

a. $S_1 > 0$. b. $S_2 > 0$.

Bài tập 8. $S > 0$.

Bài tập 9. Tìm $k \in \mathbf{Z}$, sao cho:

a. $k = 2n$ với $n \in \mathbf{Z}$.

b. $k = 2n + 1$ với $n \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 10.

a. Ta biến đổi:

$$A = \frac{\sin^2\alpha(1 + g^2\alpha)}{\cos^2\alpha(1 + \cot g^2\alpha)} = \frac{\sin^2\alpha.\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}{\cos^2\alpha.\dfrac{1}{\sin^2\alpha}} = tg^4\alpha.$$

b. Ta biến đổi:

$$B = (1 + cotg\alpha)^2 - \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + cotg^2\alpha + 2cotg\alpha - (1 + cotg^2\alpha) = 2cotg\alpha.$$

Bài tập 11. $A = 2cotg\alpha$

Bài tập 12.

a. Ta biến đổi:

$$A = \frac{1}{\sin\alpha - \sqrt{\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right)\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\sin\alpha - \sqrt{\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}}}$$

$$\overset{\alpha\in(\pi,2\pi)}{=} \frac{1}{\sin\alpha + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \sin\alpha.$$

b. Ta biến đổi:

$$B = \sqrt{(\cos\alpha + \sin\alpha).\cos\alpha + (\sin\alpha + \cos\alpha).\sin\alpha}$$

$$= \sqrt{(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)} \overset{\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})}{=} \cos\alpha + \sin\alpha.$$

Bài tập 13.

a. Ta biến đổi:

$$A = \frac{tg\alpha + tg\beta}{\dfrac{1}{tg\alpha} + \dfrac{1}{tg\beta}} = \frac{(tg\alpha + tg\beta)tg\alpha.tg\beta}{tg\alpha + tg\beta} = tg\alpha.tg\beta.$$

b. Ta biến đổi:

$$B = \frac{\cot g^2\alpha}{\sin^2\beta} - \frac{1}{\sin^2\alpha} - \text{cotg}^2\alpha.\text{cotg}^2\beta$$

$$= (\text{cotg}^2\beta + 1)\text{cotg}^2\alpha - (\text{cotg}^2\alpha + 1) - \text{cotg}^2\alpha.\text{cotg}^2\beta = -1.$$

Bài tập 14.

a. Ta biến đổi:

$$VT = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha, \text{ đpcm.}$$

b. Ta biến đổi:

$$VT = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 - 3(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$= 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 15.

a. Ta biến đổi:

$$VT = (1 + \text{tg}\alpha)\cos\alpha(1 + \text{cotg}\alpha)\sin\alpha$$

$$= (\cos\alpha + \sin\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$= 1 + 2\sin\alpha.\cos\alpha, \text{ đpcm.}$$

b. Ta biến đổi:

$$VP = (1 + \text{tg}\alpha)\cos\alpha.\cos\alpha + (1 + \text{cotg}\alpha)\sin\alpha.\sin\alpha$$

$$= (\cos\alpha + \sin\alpha)\cos\alpha + (\sin\alpha + \cos\alpha)\sin\alpha$$

$$= (\cos\alpha + \sin\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha) = (1 + \text{tg}\alpha)\cos\alpha(1 + \text{cotg}\alpha)\sin\alpha$$

$$= (1 + \text{tg}\alpha)(1 + \text{cotg}\alpha)\sin\alpha.\cos\alpha, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 16.

a. Ta biến đổi đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$\sin^2\alpha = (1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \text{ luôn đúng.}$$

b. Ta biến đổi đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$\sin^2\alpha - (\cos\alpha - 1)^2 = 2\cos\alpha.(1 - \cos\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 2\cos\alpha - 2\cos^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0, \text{ luôn đúng.}$$

c. Ta biến đổi:

$$VT = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\frac{1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)$$

$$= \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\left[\frac{1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha}\right]$$

$$= \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.\frac{2\cos\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.\frac{2(1+\cos\alpha)\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha}{\sin^3\alpha} = \frac{2\sin^2\alpha.\cos\alpha}{\sin^3\alpha} = 2\text{cotg}\alpha, \text{ đpcm.}$$

d. Ta biến đổi:

$$VT = \frac{1}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} + \frac{1}{1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = 1.$$

Bài tập 17.

a. Ta biến đổi:

$$VT = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \sin\alpha}{\sin^2\alpha.\sin\alpha} = \frac{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}{\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha(1+\cos\alpha)}.$$

b. Ta biến đổi:

$$VT = \frac{\sin^2\alpha}{1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} + \frac{\cos^2\alpha}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\sin^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} + \frac{\cos^3\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$$

$$= \frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin\alpha.\cos\alpha)}{\sin\alpha+\cos\alpha}$$

$= 1 - \sin\alpha.\cos\alpha$, đpcm.

Bài tập 18.

a. Ta biến đổi:

$$VT = \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} - 2\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}.\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$$

$$= \frac{(1-\sin\alpha)^2+(1+\sin\alpha)^2-2(1-\sin^2\alpha)}{1-\sin^2\alpha} = \frac{4\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 4tg^2\alpha, \text{ đpcm.}$$

b. Ta biến đổi:

$$VT = \frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)\sin\alpha-(\cos\alpha+\sin\alpha)\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha} = \frac{1+\cot g^2\alpha}{1-\cot g^2\alpha}, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 19.

a. Ta biến đổi:

$$VT = \frac{tg\alpha+tg\beta}{\frac{1}{tg\alpha}+\frac{1}{tg\beta}} = \frac{(tg\alpha+tg\beta)tg\alpha.tg\beta}{tg\alpha+tg\beta} = tg\alpha.tg\beta, \text{ đpcm.}$$

b. Ta biến đổi:

$$VT = \frac{\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\cos^2\alpha.\cos^2\beta}}{\frac{\sin^2\alpha.\sin^2\beta}{\cos^2\alpha.\cos^2\beta}} = \frac{\frac{1}{\cos^2\beta}.tg^2\alpha - \frac{1}{\cos^2\alpha}.tg^2\beta}{tg^2\alpha.tg^2\beta}$$

$$= \frac{(1+tg^2\beta)tg^2\alpha-(1+tg^2\alpha)tg^2\beta}{tg^2\alpha.tg^2\beta} = \frac{tg^2\alpha-tg^2\beta}{tg^2\alpha.tg^2\beta}, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 20. Ta có:

$$\frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \sin^2\alpha$$

Từ đó suy ra:

$$\sin^2a + \sin^2b + \sin^2c = 1 \Leftrightarrow \frac{tg^2a}{1+tg^2a} + \frac{tg^2b}{1+tg^2b} + \frac{tg^2c}{1+tg^2c} = 1$$

$$\Leftrightarrow tg^2a.(1 + tg^2b).(1 + tg^2c) + tg^2b.(1 + tg^2c).(1 + tg^2a) +$$
$$+ tg^2c.(1 + tg^2a).(1 + tg^2b) = (1 + tg^2a).(1 + tg^2b).(1 + tg^2c$$
$$\Leftrightarrow tg^2a.tg^2b + tg^2b.tg^2c + tg^2c.tg^2a = 1 - 2\,tg^2a.tg^2b.tg^2c,$$ đpcm.

Bài tập 21.

a. Ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha.\sin^2\beta + \cos^2\alpha.\cos^2\beta$$
$$= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$ đpcm

b. Tổng quát hoá cho n số $a_1, a_2, ..., a_n$ như sau:

$$\begin{cases} a_1 = \sin\alpha_1 \\ a_2 = \cos\alpha_1.\sin\alpha_2 \\ a_3 = \cos\alpha_1.\cos\alpha_2.\sin\alpha_3 \\ ... \\ a_{n-1} = \cos\alpha_1.\cos\alpha_2...\cos\alpha_{n-2}.\sin\alpha_{n-1} \\ a_n = \cos\alpha_1.\cos\alpha_2...\cos\alpha_{n-2}.\cos\alpha_{n-1} \end{cases}$$

Bài tập 22.

a. Ta có:

$$\sin^8\alpha + \cos^8\alpha = (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)^2 - 2\sin^4\alpha.\cos^4\alpha$$
$$= [(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha]^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2\alpha$$
$$= (1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2\alpha = \frac{1}{8}\sin^4 2\alpha - \sin^2 2\alpha + 1$$

Từ đó, suy ra:

$$A = \frac{1}{8}\sin^4 2\alpha - \sin^2 2\alpha + 1 - 2(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha)^2 = -1.$$

Vậy, biểu thức A không phụ thuộc α.

b. Ta có:

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 - 3(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$$
$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha,$$

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha.$$

Từ đó, suy ra:

$$B = 2(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha) - 3(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha) = -1.$$

Vậy, biểu thức B không phụ thuộc α.

Bài tập 23.

a. Ta có:

$$A = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Vậy, biểu thức A không phụ thuộc α.

b. Ta có:

$$B = \sin^8\alpha - (\sin^4\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha + \cos^4\alpha)^2 + \\ + \cos^8\alpha - (\sin^4\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha + \cos^4\alpha)^2$$

$$= (-\sin^2\alpha.\cos^2\alpha - \cos^4\alpha)(2\sin^4\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) + \\ + (-\sin^4\alpha - \sin^2\alpha.\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha + 2\cos^4\alpha)$$

$$= -\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)[2\sin^4\alpha + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\cos^2\alpha] - \\ - \sin^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)[(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\sin^2\alpha + 2\cos^4\alpha]$$

$$= -\cos^2\alpha(2\sin^4\alpha + \cos^2\alpha) - \sin^2\alpha(\sin^2\alpha + 2\cos^4\alpha)$$

$$= -\cos^4\alpha - \sin^4\alpha - 2\cos^2\alpha.\sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha.\cos^4\alpha$$

$$= -\cos^4\alpha - \sin^4\alpha - 2\cos^2\alpha.\sin^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

$$= -\cos^4\alpha - \sin^4\alpha - 2\cos^2\alpha.\sin^2\alpha = -(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 = -1.$$

Vậy, biểu thức B không phụ thuộc α.

Bài tập 24.

a. Ta lần lượt có:

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1 = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha - 1 = -2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha,$$

$$tg^2\alpha + cotg^2\alpha + 2 = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + 2$$

$$= \frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}.$$

Từ đó, suy ra:

$$A = -2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha.\frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} = -2.$$

Vậy, biểu thức A không phụ thuộc α.

b. Ta có:

$$\frac{(1 - tg^2\alpha)^2}{tg^2\alpha} = \frac{\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)^2}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - 4\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} - 4.$$

Từ đó, suy ra:

$$B = \frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} - 4 - \frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} = -4.$$

Vậy, biểu thức B không phụ thuộc α.

c. Ta có:

$$C = \frac{\sin^2\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha - \sin^4\alpha}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 + 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} = 2.$$

Vậy, biểu thức C không phụ thuộc α.

d. Ta có:

$$D = \frac{(1-\sin^2\alpha)(1+\sin^2\alpha+\sin^4\alpha)}{\cos^6\alpha} - \frac{3tg^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{1+\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha} - \frac{\frac{3\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\cos^2\alpha} = \frac{1+\sin^2\alpha+\sin^4\alpha-3\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}$$

$$= \frac{1-2\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha} = \frac{(1-\sin^2\alpha)^2}{\cos^4\alpha} = 1.$$

Vậy, biểu thức D không phụ thuộc α.

Bài tập 25. a = 3 và b = 6.

Bài tập 26.

a. $\sin\alpha = \frac{15}{17}$, $tg\alpha = -\frac{15}{8}$. b. $A = -\frac{61}{29}$.

Chú ý: Để có lời giải không phụ thuộc vào kết quả của câu a) ta sử dụng phép biến đổi như sau:

$$A = \frac{\frac{5\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{4\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{5\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{4\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{5\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha}{5\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + 4}{9\cos^2\alpha - 4} = -\frac{61}{29}.$$

Bài tập 27. Ta biến đổi:

$$B = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{(1+\cos\alpha)\cos\alpha + \sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}$$

$$= \frac{1+\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sqrt{2}-1} = 2(\sqrt{2}+1).$$

Bài tập 28.

a. $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ và $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

b. $C = \frac{10}{7}$.

Chú ý: Để có lời giải không phụ thuộc vào kết quả của câu a) ta sử dụng phép biến đổi như sau:

$$C = \frac{\frac{1}{\sin^2\alpha}}{\cot g^2\alpha - \cot g\alpha + 1} = \frac{\cot g^2\alpha + 1}{\cot g^2\alpha - \cot g\alpha + 1} = \frac{10}{7}.$$

Bài tập 29. Từ giả thiết:

$$tg\alpha + 2cotg\alpha = 3 \Leftrightarrow tg\alpha + \frac{2}{tg\alpha} = 3 \Leftrightarrow tg^2\alpha - 3tg\alpha + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 1 \Rightarrow \cot g\alpha = 1 \\ tg\alpha = 2 \Rightarrow \cot g\alpha = \frac{1}{2} \end{array}\right. .$$

Bài tập 30.

a. Từ giả thiết:

$$\sin^2\alpha.\cos^2\alpha = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2\alpha.(1 - \sin^2\alpha) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2\alpha - \frac{1}{2})^2 = 0 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{2} \overset{0<\alpha<\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow} \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Thay giá trị $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ vào biểu thức của giả thiết, ta được:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2.\cos^2\alpha = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2} \overset{0<\alpha<\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow} \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Từ đó, ta có ngay $tg\alpha = cotg\alpha = 1$.

b. Ta có ngay:

$$G = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Bài tập 31.

a. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}$ về dạng:

$\sin\alpha = \sqrt{2} + \cos\alpha \Leftrightarrow \sin^2\alpha = (\sqrt{2} + \cos\alpha)^2$, bởi $\sin\alpha \geq 0$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos^2\alpha = 2 + 2\sqrt{2}\cos\alpha + \cos^2\alpha \Leftrightarrow 2\cos^2\alpha + 2\sqrt{2}\cos\alpha + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}\cos\alpha + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (1)$$

Thay (1) vào giả thiết, ta được:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow tg\alpha = cotg\alpha = -1.$$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta có:

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = (1.\sin\alpha - 1.\cos\alpha)^2 \le (1 + 1)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 2$$

$$\Leftrightarrow |\sin\alpha - \cos\alpha| \le \sqrt{2}.$$

Do đó, để có được biểu thức của giả thiết thì dấu "=" phải xảy ra trong bất đẳng thức trên:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin\alpha} = -\frac{1}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \text{tg}\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = 135^0,$$

từ đó $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\text{cotg}\alpha = -1$.

b. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Tận dụng kết quả trong a), ta được:

$$F = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 = \frac{1}{4}.$$

Cách 2: Thực hiện độc lập với a), ta biến đổi:

$$F = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 - 3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha.(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

$$= 1 - 3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha. \quad (2)$$

Từ giả thiết:

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2} \Rightarrow 2 = (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha.\cos\alpha = -\frac{1}{2}. \quad (3)$$

Thay (3) vào (2), ta được:

$$F = 1 - 3.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Bài tập 32.

a. Từ giả thiết:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = m \Rightarrow m^2 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow A = \sin\alpha.\cos\alpha = \frac{m^2 - 1}{2}.$$

b. Ta có:

$$B = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - 2\cos^2\alpha.\sin^2\alpha$$

$$= 1 - 2.\left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{(m^2 - 1)^2}{2} = \frac{1 + 2m^2 - m^4}{2}.$$

c. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Tận dụng kết quả trong a) và b), ta được:

$$C = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} = \frac{2(1 + 2m^2 - m^4)}{(m^2 - 1)^2}.$$

Cách 2: Tận dụng kết quả trong a), ta được:

$$C = (tg\alpha + cotg\alpha)^2 - 2 = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 - 2 = \frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} - 2$$

$$= \frac{4}{(m^2-1)^2} - 2 = \frac{2(1+2m^2-m^4)}{(m^2-1)^2}.$$

d. Ta có:

$$E = \frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - 1} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha = m.$$

Bài tập 33.

a. Từ giả thiết:

$$a.\sin\alpha + b.\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow a.\sin\alpha = -b.\cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{b}{a} = tg\alpha \\ \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\dfrac{a}{b} = cotg\alpha \end{cases}.$$

Ngoài ra, ta cũng suy ra được:

$$a^2\sin^2\alpha = b^2\cos^2\alpha \Leftrightarrow a^2\sin^2\alpha = b^2(1 - \sin^2\alpha) \Leftrightarrow (a^2 + b^2)\sin^2\alpha = b^2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{b^2}{a^2+b^2} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

b. $\sin\alpha = \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $tg\alpha = cotg\alpha = 1$.

c. Từ giả thiết:

$$5\sin\alpha - 20\cos\alpha = 4(tg\alpha - 4) \Leftrightarrow 5(\sin\alpha - 4\cos\alpha) = \frac{4}{\cos\alpha}(\sin\alpha - 4\cos\alpha)$$

$$\Leftrightarrow (5\cos\alpha - 4)(\sin\alpha - 4\cos\alpha) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5\cos\alpha - 4 = 0 \\ \sin\alpha - 4\cos\alpha = 0 \end{array}\right..$$

- Với $5\cos\alpha - 4 = 0$, suy ra:

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5} \text{ và } tg\alpha = \frac{3}{4}, cotg\alpha = \frac{4}{3}.$$

- Với $\sin\alpha - 4\cos\alpha = 0$, suy ra:

$$\sin\alpha = 4\cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} tg\alpha = 4 \\ cotg\alpha = \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

$$\sin^2\alpha = 16\cos^2\alpha \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 16(1 - \sin^2\alpha) \Leftrightarrow 17\sin^2\alpha = 16$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{16}{17} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{17}}.$$

d. Từ giả thiết:

$$49 - 50\sin\alpha.\cos\alpha = 12(\text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha)$$

$$\Leftrightarrow 49 - 50\sin\alpha.\cos\alpha = \frac{12}{\sin\alpha.\cos\alpha}.$$

Đặt $t = \sin\alpha.\cos\alpha$, ta được:

$$49 - 50t = \frac{12}{t} \Leftrightarrow 50t^2 - 49t + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{12}{25} \end{array}\right..$$

- Với $t = \frac{1}{2}$, suy ra:

$$\begin{cases} (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha.\cos\alpha \\ \sin\alpha.\cos\alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2} \\ \sin\alpha.\cos\alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Tức $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - x\sqrt{2} + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ và } \text{tg}\alpha = \text{cotg}\alpha = 1.$$

- Với $t = \frac{12}{25}$ – *Bạn đọc tự giải tương tự.*

Bài tập 34. Đặt $t = \sin^2\alpha$, với $0 \le t \le 1$.

Khi đó:

- $A = 2\sin^4\alpha + 3(1 - \sin^2\alpha)^2 = 2t^2 + 3(1 - t)^2 = 5t^2 - 6t + 3.$
- Biểu thức của giả thiết được biến đổi về dạng:

$$3\sin^4\alpha + 2(1 - \sin^2\alpha)^2 = \frac{98}{81} \Leftrightarrow 3t^2 + 2(1 - t)^2 = \frac{98}{81}$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 - 4t + \frac{64}{81} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{4}{9} \Rightarrow A = \frac{107}{81} \\ t = \frac{16}{45} \Rightarrow A = \frac{607}{405} \end{array}\right..$$

Bài tập 35. Ta được:

$$\sin(180^0 - \alpha) = \frac{6}{7}, \cos(180^0 - \alpha) = \frac{\sqrt{13}}{7},$$

$$\text{tg}(180^0 - \alpha) = \frac{6}{\sqrt{13}}, \text{cotg}(180^0 - \alpha) = \frac{\sqrt{13}}{6}.$$

Bài tập 36. Ta được:

$$\sin(90^0 - \alpha) = \frac{1}{4},\ \cos(90^0 - \alpha) = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\text{tg}(90^0 - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{15}},\ \text{cotg}(90^0 - \alpha) = \sqrt{15}.$$

$$\sin(180^0 - \alpha) = \frac{\sqrt{15}}{4},\ \cos(180^0 - \alpha) = -\frac{1}{4},$$

$$\text{tg}(180^0 - \alpha) = -\sqrt{15},\ \text{cotg}(180^0 - \alpha) = -\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Bài tập 37. Ta được:

$$\sin(90^0 - \alpha) = \frac{4}{\sqrt{41}},\ \cos(90^0 - \alpha) = \frac{5}{\sqrt{41}},$$

$$\text{tg}(90^0 - \alpha) = \frac{4}{5},\ \text{cotg}(90^0 - \alpha) = \frac{5}{4},$$

$$\sin(180^0 - \alpha) = \frac{5}{\sqrt{41}},\ \cos(180^0 - \alpha) = -\frac{4}{\sqrt{41}},$$

$$\text{tg}(180^0 - \alpha) = -\frac{5}{4},\ \text{cotg}(180^0 - \alpha) = -\frac{4}{5}.$$

Bài tập 38. Ta được:

$$\sin(180^0 - \alpha) = \frac{3}{\sqrt{11}},\ \cos(180^0 - \alpha) = \sqrt{\frac{2}{11}},$$

$$\text{tg}(180^0 - \alpha) = \frac{3}{\sqrt{2}},\ \text{cotg}(180^0 - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Bài tập 39.

a. Ta biến đổi:

$$A = 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3[(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + 2].$$

Trong đó:

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 - 3(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$$
$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha,$$

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha.$$

Từ đó, suy ra:

$$A = 2(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha) - 3[(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha) + 2] = -7.$$

b. Ta biến đổi:

$$B = \frac{1 - \sin^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} + \text{tg}\alpha.\text{cotg}\alpha = \text{cotg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

c. Ta biến đổi:

$$C = \frac{[-\sin 954^0 - \cos 1296^0].tg36^0}{\sin 504^0 - \cos 234^0} = \frac{[-\sin 234^0 - \cos 216^0].tg36^0}{\sin 144^0 - \cos 234^0}$$

$$= \frac{[-\sin(180^0 + 90^0 - 36^0) - \cos(180^0 + 36^0)].tg36^0}{\sin(180^0 - 36^0) - \cos(180^0 + 90^0 - 36^0)}$$

$$= \frac{[\sin(90^0 - 36^0) + \cos 36^0].tg36^0}{\sin 36^0 + \cos(90^0 - 36^0)} = \frac{(\cos 36^0 + \cos 36^0).\frac{\sin 36^0}{\cos 36^0}}{\sin 36^0 + \sin 36^0} = 1.$$

Bài tập 40.

a. Ta biến đổi:

$$A = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 2\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \sin^2\alpha$$
$$= (\sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha + 1)\sin^2\alpha + (\cos^2\alpha - 1)\cos^4\alpha$$
$$= (\sin^2\alpha - 1)^2\sin^2\alpha - \sin^2\alpha.\cos^4\alpha = \cos^4\alpha.\sin^2\alpha - \sin^2\alpha.\cos^4\alpha = 0.$$

b. Ta biến đổi:

$$B = (1 + cotg^2\alpha)(1 + cotg^2\alpha).\sin\alpha.\sin\alpha.(-\sin\alpha).(-\sin\alpha)$$
$$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 1.$$

Bài tập 41.

a. Ta biến đổi:

$$A = \cos^4\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$$
$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Vậy, biểu thức A không phụ thuộc α.

b. Ta biến đổi:

$$B = \frac{(1 - cotg^2\alpha)^2}{cotg^2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}.$$

Trong đó:

$$\frac{(1 - cotg^2\alpha)^2}{cotg^2\alpha} = \frac{\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)^2}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)^2}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - 4\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} - 4.$$

Từ đó, suy ra:

$$B = \frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} - 4 - \frac{1}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha} = -4.$$

Vậy, biểu thức B không phụ thuộc α.

Bài tập 42.

a. Viết lại S dưới dạng:

$$S = (\cos 20^0 + \cos 160^0) + (\cos 40^0 + \cos 140^0) +$$
$$+ (\cos 60^0 + \cos 120^0) + (\cos 80^0 + \cos 100^0) + \cos 180^0$$

$= (\cos 20^0 - \cos 20^0) + (\cos 40^0 - \cos 40^0) +$

$+ (\cos 60^0 - \cos 60^0) + (\cos 80^0 - \cos 80^0) - 1$

$= -1.$

b. Viết lại S dưới dạng:

$$S = (\text{tg}10^0 + \text{tg}170^0) + (\text{tg}30^0 + \text{tg}150^0) + $$
$$+ (\text{tg}50^0 + \text{tg}130^0) + (\text{tg}70^0 + \text{tg}110^0)$$
$$= (\text{tg}10^0 - \text{tg}10^0) + (\text{tg}30^0 - \text{tg}30^0) +$$
$$+ (\text{tg}50^0 - \text{tg}50^0) + (\text{tg}70^0 - \text{tg}70^0)$$
$$= 0.$$

c. Viết lại S dưới dạng:

$$S = 2(\sin^2 1^0 + \sin^2 2^0 + ... + \sin^2 89^0) + \sin^2 90^0$$
$$= 2[(\sin^2 1^0 + \sin^2 89^0) + \ldots + (\sin^2 44^0 + \sin^2 46^0) + \sin^2 45^0] + \sin^2 90^0$$
$$= 2(44 + \frac{1}{2}) + 1 = 90.$$

d. Viết lại S dưới dạng:

$$S = (\cos^2 2^0 + \cos^2 88^0) + ... + (\cos^2 44^0 + \cos^2 46^0) + \cos^2 90^0 = 22.$$

Bài tập 43.

a. Ta xét hai trường hợp cho k chẵn và k lẻ:

- Với $k = 2l$, $l \in \mathbf{Z}$, ta được:

$$A = \cos(\frac{\pi}{6} + 2l\pi) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- Với $k = 2l + 1$, $l \in \mathbf{Z}$, ta được:

$$A = \cos(\frac{\pi}{6} + \pi + 2l\pi) = \cos(\frac{\pi}{6} + \pi) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy, ta được:

$$A = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{nếu } k = 2l \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{nếu } k = 2l + 1 \end{cases}, \text{ với } l \in \mathbf{Z}.$$

b. Ta xét ba trường hợp cho k:

- Với $k = 3l$, $l \in \mathbf{Z}$, ta được:

$$B = \text{cotg}(\frac{\pi}{3} + l\pi) = \text{cotg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

- Với $k = 3l + 1$, $l \in \mathbf{Z}$, ta được:

$$B = \text{cotg}(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + l\pi) = \text{cotg}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

- **Với k = 3l + 2, l ∈ Z, ta được:**

$$B = \cot g(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + l\pi) = \cot g\pi = \infty.$$

Vậy, ta được:

$$B = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} & \text{nếu } k = 3l \\ \infty & \text{nếu } k = 3l + 2 \text{, với } l \in \mathbf{Z}. \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \text{nếu } k = 3l + 1 \end{cases}$$

c. ***Bạn đọc tự làm*** **– Bằng việc xét sáu trường hợp cho k, cụ thể:**

k = 6l, k = 6l + 1, k = 6l + 2, k = 6l + 3, k = 6l + 4, k = 6l + 5, l ∈ Z.

Thí dụ:

- **Với k = 6l, l ∈ Z, ta được:**

$$C = \sin(\frac{\pi}{3} + 2l\pi).tg(\frac{\pi}{4} + 3l\pi) = \sin\frac{\pi}{3}.tg\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- **Với k = 6l + 1, l ∈ Z, ta được:**

$$C = \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + 2l\pi).tg(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 3l\pi) = -\sin\frac{2\pi}{3}.\cot g\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

CHỦ ĐỀ 2

CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. HÀM TUẦN HOÀN

Hàm số f(x) xác định trên tập hợp D gọi là *tuần hoàn* nếu tồn tại một số dương T sao cho với mọi $x \in D$ ta có:

$$x - T \in D \text{ và } x + T \in D \quad (1)$$

$$f(x + T) = f(x) \quad (2)$$

Số nhỏ nhất (nếu có) trong các số T có các tính chất trên gọi là *chu kỳ cơ sở* của hàm tuần hoàn f(x).

Chú ý: Các dấu hiệu để biết hàm số f(x) không phải là hàm tuần hoàn

Hàm số f(x) không phải là hàm tuần hoàn khi một trong các điều kiện sau bị vi phạm:

a. Tập xác định của hàm số là tập hữu hạn.

b. Tồn tại số a sao cho hàm số không xác định với $x > a$ hoặc $x < a$.

c. Phương trình $f(x) = k$ có nghiệm nhưng số nghiệm hữu hạn.

d. Phương trình $f(x) = k$ có vô số nghiệm sắp thứ tự $.. < x_n < x_{n+1} < ..$ mà

$$|x_n - x_{n+1}| \to 0 \text{ hay } \infty.$$

2. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC BIẾN SỐ THỰC

2.1. Hàm số y = sinx

Ta có:

- Hàm số y = sinx là hàm số lẻ trên **R**.
- Hàm số y = sinx tuần hoàn với chu kỳ 2π.

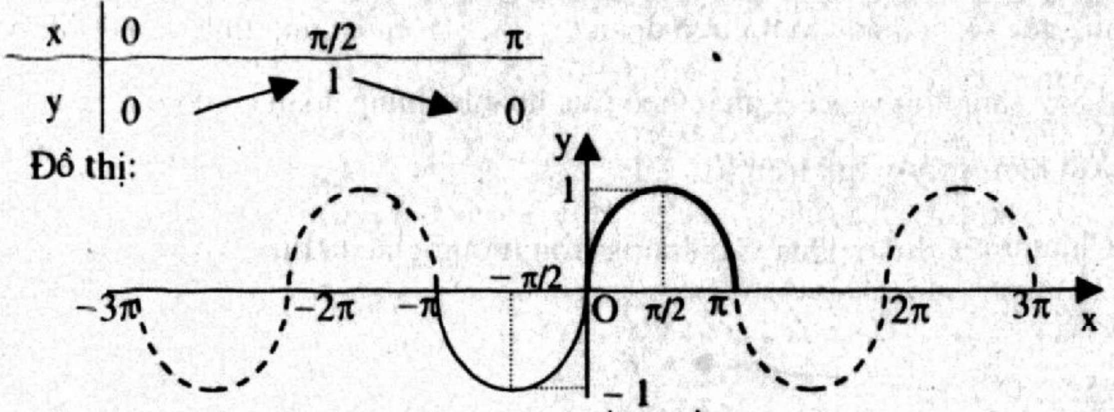
Do đó, muốn khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số y = sinx trên **R** ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $[0, \pi]$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc O, ta được đồ thị trên đoạn $[-\pi, \pi]$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành những đoạn có độ dài 2π, 4π,...

Xét hàm số y = sinx trên $[0, \pi]$

Chiều biến thiên: Dựa vào đường tròn lượng giác ta được:

x	0		$\pi/2$		π
y	0	↗	1	↘	0

Đồ thị:



Từ đây, ta có nhận xét quan trọng là $|\sin x| \le 1$.

2.2. Hàm số y = cosx

Ta có:

- Hàm số y = cosx là hàm số chẵn trên **R**.
- Hàm số y = cosx tuần hoàn với chu kỳ 2π.

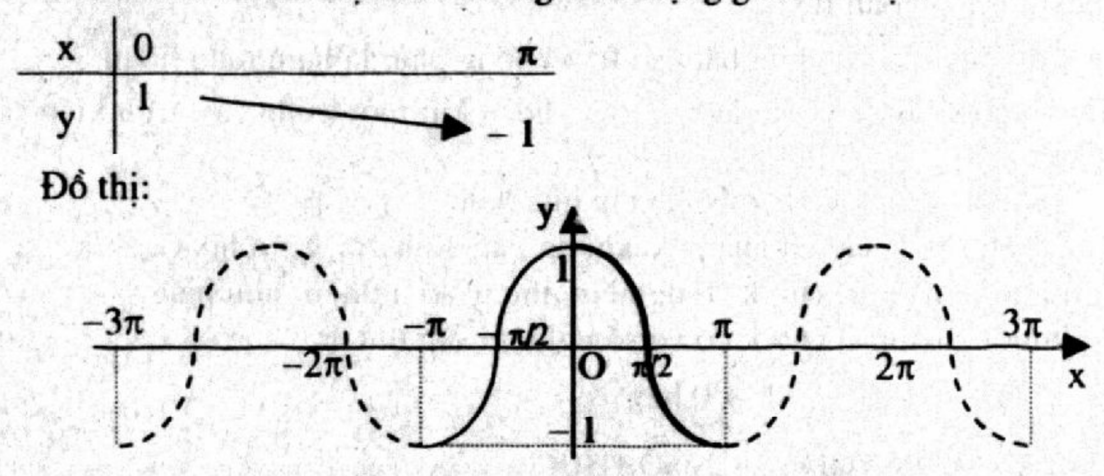
Do đó, muốn khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số y = cosx trên **R** ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $[0, \pi]$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua trục Oy, ta được đồ thị trên đoạn $[-\pi, \pi]$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành những đoạn có độ dài 2π, 4π,...

Xét hàm số y = cosx trên $[0, \pi]$

Chiều biến thiên: Dựa vào đường tròn lượng giác ta được:

x	0		π
y	1	↘	−1

Đồ thị:



Từ đây ta có nhận xét quan trọng là $|\cos x| \le 1$.

2.3. Hàm số y = tgx

Ta có:

- Hàm số y = tgx là hàm số lẻ trên $\mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
- Hàm số y = tgx tuần hoàn với chu kỳ π.

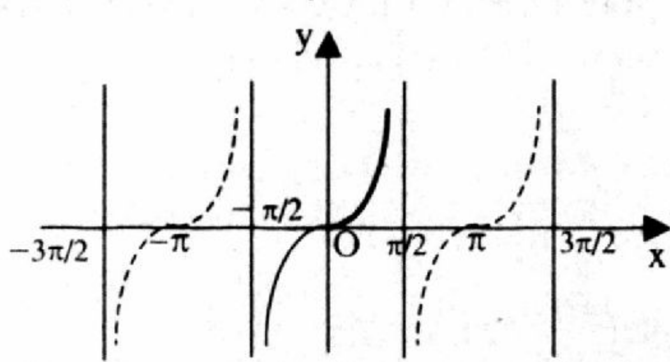
Do đó, muốn khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số y = tgx trên **R** ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $[0, \frac{\pi}{2})$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc O, ta được đồ thị trên đoạn $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành những đoạn có độ dài π, 2π,...

Xét hàm số y = tgx trên $[0, \frac{\pi}{2})$

Chiều biến thiên: Dựa vào đường tròn lượng giác ta được:

x	0		$\pi/2$
y	0	↗	$+\infty$

Đồ thị:



2.4. Hàm số y = cotgx

Ta có:

- Hàm số y = cotgx là hàm số lẻ trên **R**\{kπ, k ∈ **Z**}.
- Hàm số y = cotgx tuần hoàn với chu kỳ π.

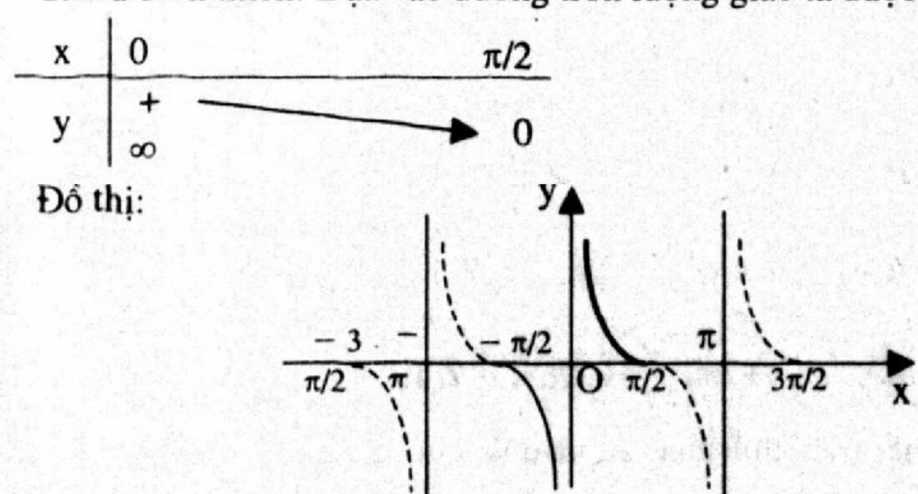
Do đó, muốn khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số y = cotgx trên **R** ta chỉ cần khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên đoạn $(0, \frac{\pi}{2}]$, sau đó lấy đối xứng đồ thị qua gốc O, ta được đồ thị trên đoạn $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, cuối cùng tịnh tiến đồ thị vừa thu được sang trái và sang phải theo trục hoành những đoạn có độ dài π, 2π,...

Xét hàm số y = cotgx trên $(0, \frac{\pi}{2}]$

Chiều biến thiên: Dựa vào đường tròn lượng giác ta được:

x	0	π/2
y	+∞ ↘	0

Đồ thị:



II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Tập xác định của hàm số lượng giác .

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Muốn tìm tập xác định D của hàm số y = f(x) ta lựa chọn một trong hai phương pháp sau:

Phương pháp 1. Tìm tập D của x để f(x) có nghĩa, tức là tìm:

$$D = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) \text{ có nghĩa}\}.$$

Phương pháp 2. Tìm tập E của x để f(x) không có nghĩa, khi đó tập xác định của hàm số là D = **R** \ E

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{1}{2\sin x - \sqrt{3}}$.

- ❑ $D = \mathbf{R} \backslash \{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
- ❑ $D = \mathbf{R} \backslash \{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
- ❑ $D = \mathbf{R} \backslash \{\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
- ❑ $D = \mathbf{R} \backslash \{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

b. $y = \dfrac{1}{4 - 5\cos x - 2\sin^2 x}$.

- ❑ $D = \mathbf{R} \backslash \{\pm\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
- ❑ $D = \mathbf{R} \backslash \{\pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
- ❑ $D = \mathbf{R} \backslash \{\pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
- ❑ $D = \mathbf{R} \backslash \{\pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

c. $y = \dfrac{1}{\cot gx - \sqrt{3}}$.

- ❑ $D = \mathbf{R} \backslash \{\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
- ❑ $D = \mathbf{R} \backslash \{\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
- ❑ $D = \mathbf{R} \backslash \{\dfrac{\pi}{3} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.
- ❑ $D = \mathbf{R} \backslash \{\dfrac{2\pi}{3} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

Bài tập 2: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{-2\cos x - \sqrt{2}}$.

- ❑ $D = [\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi], k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $D = [\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi], k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $D = [-\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi], k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $D = [-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi], k \in \mathbf{Z}$.

b. $y = \sqrt{\dfrac{\cos x}{1 + 2\cos x} - \dfrac{1 - \cos x}{1 - 2\cos x}}$.

❑ $D = \mathbf{R}$.

❑ $D = (-\dfrac{\pi}{3} + k\pi, \dfrac{\pi}{3} + k\pi), k \in \mathbf{Z}$.

❑ $D = (-\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{4} + k\pi), k \in \mathbf{Z}$.

❑ $D = (-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi) \cup (\dfrac{3\pi}{4} + k\pi, \dfrac{5\pi}{4} + k\pi), k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 3: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{1}{\sqrt{-\cot gx - \sqrt{3}}}$.

❑ $D = \mathbf{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $D = \mathbf{R} \setminus \{2k\pi\}, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $D = (k\pi, \dfrac{5\pi}{6} + k\pi), k \in \mathbf{Z}$.

❑ $D = (\dfrac{5\pi}{6} + k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbf{Z}$.

b. $y = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{tg^2x - 2}{tg^2x - 1}}}$.

❑ $D = \mathbf{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\}, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $D = \mathbf{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi\}, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $D = (\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{3} + k\pi), k \in \mathbf{Z}$.

❑ $D = (-\dfrac{\pi}{3} + k\pi, -\dfrac{\pi}{4} + k\pi) \cup (\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{3} + k\pi), k \in \mathbf{Z}$.

Bài toán 2: Tính tuần hoàn của các hàm số lượng giác .

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Để chứng minh hàm số $y = f(x)$ tuần hoàn, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xét hàm số $y = f(x)$, tập xác định là D, ta cần dự đoán số thực dương T_0 sao cho:

Với mọi $x \in D$, ta có:

$$x - T_0 \in D \text{ và } x + T_0 \in D \quad (1)$$

$$f(x + T_0) = f(x) \quad (2)$$

Bước 2: Vậy hàm số $y = f(x)$ là tuần hoàn.

2. Chứng minh rằng T_0 là chu kỳ của hàm số, tức là chứng minh T_0 là số nhỏ nhất (1), (2), ta thực hiện phép chứng minh bằng phản chứng theo các bước:

Bước 1: Giả sử có số T sao cho $0 < T < T_0$ thoả mãn tính chất (2):

$$\forall x \in D,\ f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow ...$$

$$\Rightarrow \text{mâu thuẫn với giả thiết } 0 < T < T_0.$$

Bước 2: Mâu thuẫn này chứng tỏ T_0 là số dương nhỏ nhất thoả mãn (2).

Bước 3: Vậy hàm số y = f(x) là tuần hoàn với *chu kỳ cơ sở* T_0.

3. Xét tính tuần hoàn của các hàm số lượng giác, chúng ta sử dụng các kết quả:

   a. Hàm số y = sinx và y = cosx, tuần hoàn với chu kỳ 2π.

   Mở rộng: Hàm số y = sin(ax + b) và y = cos(ax + b) với $a \neq 0$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{a}$.

   b. Hàm số y = tgx và y = cotgx, tuần hoàn với chu kỳ π.

   Mở rộng: Hàm số y = tg(ax + b) và y = cotg(ax + b) với $a \neq 0$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{\pi}{a}$.

cùng với kết quả của định lý:

Định lý 1: Cho cặp hàm số f(x), g(x) tuần hoàn trên tập M có các chu kỳ lần lượt là a và b với $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Khi đó, các hàm số:

$$F(x) = f(x) + g(x),\ G(x) = f(x).g(x),$$

cũng tuần hoàn trên M.

Mở rộng: Hàm số F(x) = mf(x) + ng(x) tuần hoàn với chu kỳ T là bội số chung nhỏ nhất của a, b.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 4: Hãy xem những hàm số nào trong các hàm số cho dưới đây là hàm tuần hoàn và xác định chu kỳ nhỏ nhất (nếu có) của chúng:

a. $f(x) = 2\cos 2x$.

□ $T = 4\pi$. □ $T = 2\pi$. □ $T = \pi$. □ $T = \frac{\pi}{2}$.

b. $f(x) = \text{cotg}\frac{x}{2} - 4\text{tg}\frac{x}{4}$.

□ $T = 4\pi$. □ $T = \pi$. □ $T = \frac{\pi}{2}$. □ $T = \frac{\pi}{4}$.

c. $f(x) = \sin 2x + 2\cos 3x$.

□ $T = 2\pi$. □ $T = \pi$. □ $T = \frac{2\pi}{3}$. □ $T = \frac{\pi}{3}$.

d. $f(x) = 2\cos^2 x + 4\cos^3 x + 16\cos^4 x$.

□ $T = 2\pi$. □ $T = \pi$. □ $T = \frac{\pi}{2}$. □ $T = \frac{\pi}{4}$.

Bài tập 5: Hãy xem những hàm số nào trong các hàm số cho dưới đây là hàm tuần hoàn và xác định chu kỳ nhỏ nhất (nếu có) của chúng:

a. $f(x) = 2\cos^2 x - 3\sin x + 2$. b. $f(x) = 2\cos x + \sin(x\sqrt{3})$.

Bài tập 6: Hãy xem những hàm số nào trong các hàm số cho dưới đây là hàm tuần hoàn và xác định chu kỳ nhỏ nhất (nếu có) của chúng:

a. $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$.

❑ $T = \pi\sqrt{2}$. ❑ $T = 2\pi$. ❑ $T = \pi$. ❑ $T = \frac{\pi}{2}$.

b. $f(x) = \sqrt{1 + \cot gx}$.

$T = 2\pi$. ❑ $T = \pi$. ❑ $T = \frac{\pi}{2}$. ❑ $T = \frac{\pi}{4}$.

Bài tập 7: Hãy xem những hàm số nào trong các hàm số cho dưới đây là hàm tuần hoàn và xác định chu kỳ nhỏ nhất (nếu có) của chúng:

a. $f(x) = \cot g\sqrt{x}$. b. $f(x) = \cos(x^2)$.

Bài tập 8: Dùng định nghĩa tìm chu kỳ của hàm số:

$$f(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x.$$

❑ $T = \frac{2\pi}{\lambda}$. ❑ $T = \frac{\pi}{\lambda}$. ❑ $T = \lambda\pi$. ❑ $T = 2\lambda\pi$.

Bài tập 9: Tồn tại hay không tồn tại một hàm số f(x) không phải là hằng số, tuần hoàn trên **R** nhưng không có chu kỳ cơ sở.

Bài toán 3: Tính chẵn, lẻ của hàm số lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số, khi đó:

- Nếu D là tập đối xứng (tức là $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$), ta thực hiện tiếp bước 2.
- Nếu D không phải là tập đối xứng (tức là $\exists x \in D$ mà $-x \notin D$), ta kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

Bước 2: Xác định $f(-x)$, khi đó:

- Nếu $f(-x) = f(x)$ kết luận hàm số là hàm chẵn.
- Nếu $f(-x) = -f(x)$ kết luận hàm số là hàm lẻ.
- Ngoài ra kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

Chú ý: Với các hàm số lượng giác cơ bản, ta có:

1. Hàm số y = sinx là hàm số lẻ.
2. Hàm số y = cosx là hàm số chẵn
3. Hàm số y = tgx là hàm số lẻ.
4. Hàm số y = cotgx là hàm số lẻ.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 10: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a. $f(x) = x.\sin x$.

❑ Hàm chẵn. ❑ Hàm lẻ. ❑ Không chẵn không lẻ.

b. $f(x) = \cos^2 x + 4\sin x$.

❑ Hàm chẵn. ❑ Hàm lẻ. ❑ Không chẵn không lẻ.

Bài tập 11: Xét tính chẵn, lẻ của hàm số:

$$f(x) = |x|.\cos x.$$

❑ Hàm chẵn. ❑ Hàm lẻ. ❑ Không chẵn không lẻ.

Bài tập 12: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a. $f(x) = \dfrac{\cos^{2004n} x + 2004}{\sin x}$.

❑ Hàm chẵn. ❑ Hàm lẻ. ❑ Không chẵn không lẻ.

b. $f(x) = \dfrac{x}{\sin x + tgx}$.

❑ Hàm chẵn. ❑ Hàm lẻ. ❑ Không chẵn không lẻ.

Bài tập 13: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a. $f(x) = \dfrac{\cos x}{6x^6 + 4x^4 + 2x^2 + 1}$.

❑ Hàm chẵn. ❑ Hàm lẻ. ❑ Không chẵn không lẻ.

b. $f(x) = \sqrt[2005]{\dfrac{\sin x + \cot gx}{x^2 + 1 - \cos x}}$.

❑ Hàm chẵn. ❑ Hàm lẻ. ❑ Không chẵn không lẻ.

Bài toán 4: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

1. Với các hàm số lượng giác cơ bản, ta có:

a. Hàm số $y = \sin x$

- Đồng biến trên khoảng $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- Nghịch biến trên khoảng $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

b. Hàm số $y = \cos x$

- Đồng biến trên khoảng $(-\pi + 2k\pi, 2k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- Nghịch biến trên khoảng $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

c. Hàm số $y = tgx$ đồng biến.

d. Hàm số $y = cotgx$ nghịch biến.

2. Với các hàm số lượng giác phức hợp, để xét sự biến thiên của nó ta sử dụng định nghĩa.

3. Để vẽ đồ thị hàm số, thí dụ $y = |\cos x|$, thì ta sử dụng ngay đồ thị của hàm số cosx rồi thực hiện các phép đối xứng.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 14: Xét sự biến thiên của các hàm số sau trên một chu kỳ của nó:

a. $y = \cos 2x$.

b. $y = 1 - \cos x$.

c. $y = \cot g3x$.

d. $y = 1 - \cos 4x$.

Bài tập 15: Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a. $y = |\sin x|$.

b. $y = \cot g|x|$.

c. $y = \cos(-x)$.

d. $y = tg(-x)$.

Bài tập 16: Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a. $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$.

b. $y = \cot g(x + \frac{\pi}{3})$.

c. $y = \sin(\frac{\pi}{4} - x)$.

d. $y = tg(2x - \frac{\pi}{6})$.

Bài tập 17: Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a. $y = 1 - \sin x$.

b. $y = \cos 2x$.

c. $y = 2 + tgx$.

d. $y = 2\cot g2x$.

Bài tập 18: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số:

a. $y = (1 - \sin x).\cos x$.

b. $y = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$.

c. $y = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x$.

d. $y = \sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$.

Bài toán 5: So sánh giá trị của các hàm số lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng:

1. Dấu của các giá trị lượng giác
2. Sự biến thiên của các hàm số lượng giác.
3. Phần tử trung gian.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 19: So sánh các cặp số sau:

a. $\sin 56^0$ và $\sin 71^0 13'$.

b. $\sin 132^0 21'$ và $\sin 144^0 11'$.

Bài tập 20: So sánh các cặp số sau:

a. $\sin 31^0 18'$ và $\sin 132^0 1'$.

b. $\cos 113^0$ và $\cos 39^0$.

Bài tập 21: So sánh các cặp số sau:

a. $\cos 102^0$ và $\sin 111^0$.   b. $\cos 47^0$ và $\sin 46^0$.

Bài tập 22: So sánh các cặp số sau:

a. $tg133^0$ và $tg145^0$.   c. $tg46^0$ và $cotg47^0$.

b. $cotg41^0$ và $cotg33^023'$.

III.HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Hàm số xác định khi:

$$\sin x \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq \sin\frac{\pi}{3} \\ \sin x \neq \sin\frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x \neq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R}\backslash\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

b. Hàm số xác định khi:

$$4 - 5\cos x - 2\sin^2 x \neq 0 \Leftrightarrow 4 - 5\cos x - 2(1 - \cos^2 x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 2 \\ \cos x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq \cos\frac{\pi}{3} \\ \cos x \neq \cos(-\frac{\pi}{3}) \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R}\backslash\{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

c. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cot gx \neq \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{6} + k\pi, k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$.

Bài tập 2.

a. Hàm số xác định khi:

$$-2\cos x - \sqrt{2} \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = [\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi], k \in \mathbf{Z}$.

b. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \sqrt{\frac{(1-2\cos x)\cos x-(1+2\cos x)(1-\cos x)}{(1+2\cos x)(1-2\cos x)}} = \frac{1}{\sqrt{4\cos^2 x - 1}}.$$

Hàm số xác định khi:

$$4\cos^2 x - 1 > 0 \Leftrightarrow |\cos x| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi), k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 3.

a. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ -\cot gx - \sqrt{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ \cot gx < -\sqrt{3} = \cot g\frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\pi}{6} + k\pi < x < \pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $D = (\frac{5\pi}{6} + k\pi, \pi + k\pi)$.

b. Trước hết ta cần các điều kiện:

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}. \quad (*)$$

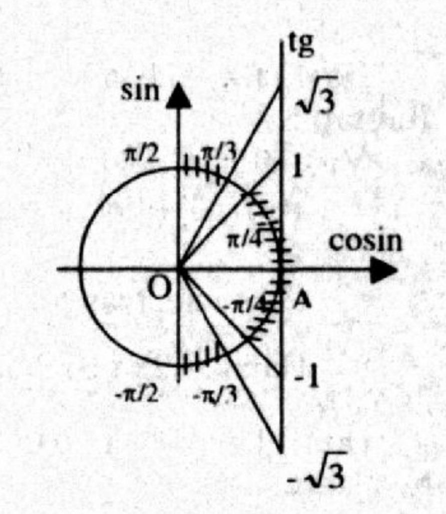
$$tg^2x \neq 1 \Leftrightarrow tgx \neq \pm 1 \Leftrightarrow x \neq \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}. \quad (**)$$

Hàm số xác định khi:

$$\frac{1}{2} - \frac{tg^2x - 2}{tg^2x - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{tg^2x - 3}{tg^2x - 1} < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < tg^2x < 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < tgx < \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} < tgx < -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi \\ -\frac{\pi}{3} + k\pi < x < -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$



Vậy, tập xác định của hàm số là:

$$D = (-\frac{\pi}{3} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi) \cup (\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi), k \in \mathbf{Z}.$$

Bài tập 4.

a. f(x) là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

b. Ta có:

- Hàm $\cot g\frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ 2π.
- Hàm $tg\frac{x}{4}$ tuần hoàn với chu kỳ 4π.

Do đó f(x) là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T = 4\pi$.

c. Ta có:

- Hàm sin2x tuần hoàn với chu kỳ π.
- Hàm cos3x tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{3}$.

Do đó f(x) là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.

d. Ta có:

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x,\quad 4\cos^3 x = \cos 3x + 3\cos x,$$
$$16\cos^4 x = 4(1 + \cos 2x)^2 = 4 + 8\cos 2x + 4\cos^2 2x$$
$$= 4 + 8\cos 2x + 2(1 + \cos 4x) = 6 + 8\cos 2x + 2\cos 4x.$$

Từ đó, hàm số được viết lại dưới dạng:

$$f(x) = 1 + \cos 2x + \cos 3x + 3\cos x + 6 + 8\cos 2x + 2\cos 4x$$
$$= 7 + 3\cos x + 9\cos 2x + \cos 3x + 2\cos 4x.$$

Ta có:

- Hàm cosx tuần hoàn với chu kỳ 2π.
- Hàm cos2x tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{2} = \pi$.
- Hàm cos3x tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{3}$.
- Hàm cos4x tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Do đó f(x) là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.

Bài tập 5.

a. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$f(x) = 1 + \cos 2x - 3\sin x + 2 = 3 - 3\sin x + \cos 2x.$$

Ta có:

- Hàm sinx tuần hoàn với chu kỳ 2π.
- Hàm cos2x tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

Do đó f(x) là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.

b. Ta có:

- Hàm cosx tuần hoàn với chu kỳ 2π.
- Hàm $\sin(x\sqrt{3})$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Nhưng vì 1 và $\sqrt{3}$ không khả ước, nghĩa là không tồn tại bội số chung bé nhất đối với các chu kỳ 2π và $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, nên hàm số f(x) không tuần hoàn.

Bài tập 6.

a. Hàm số xác định trên **R**.

Ta có hàm sinx tuần hoàn do đó hàm f(x) là hàm tuần hoàn với chu kỳ là số T nhỏ nhất thoả mãn:

$$f(x + T) = \sqrt{1 + \sin(x + T)} = \sqrt{1 + \sin x} = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + T) = \sin x \Rightarrow T = 2\pi.$$

Do đó f(x) là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.

b. Hàm số xác định với $k\pi < x \le \dfrac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

Ta có hàm cotgx tuần hoàn do đó hàm f(x) là hàm tuần hoàn với chu kỳ là số T nhỏ nhất thoả mãn:

$$f(x + T) = \sqrt{1 + \cot g(x + T)} = \sqrt{1 + \cot gx} = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \text{cotg}(x + T) = \text{cotg}x \Rightarrow T = \pi.$$

Do đó f(x) là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

Bài tập 7.

a. Ta có:

- Hàm cotgx tuần hoàn với chu kỳ π.
- Hàm cotg $\sqrt{x}$ tuần hoàn với chu kỳ π^2,

Nhưng vì 1 và π không khả ước, nghĩa là không tồn tại bội số chung bé nhất đối với các chu kỳ π và π^2, nên hàm số f(x) không tuần hoàn.

Chú ý: *Các em học sinh có thể chứng minh hàm số không tuần hoàn bằng phương pháp chứng minh phản chứng.*

b. Hàm số f(x) không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới 0, thật vậy:

$$\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi} + \sqrt{k\pi}} \to 0 \text{ khi } k \to \infty \text{ (dấu hiệu d).}$$

Bài tập 8. Giả sử hàm số tuần hoàn với chu kỳ T, ta có:

$$f(x + T) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow A\cos\lambda(x + T) + B\sin\lambda(x + T) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

$$\Leftrightarrow A[\cos\lambda x.\cos\lambda T - \sin\lambda x.\sin\lambda T] + B[\sin\lambda x.\cos\lambda T - \cos\lambda x.\sin\lambda T] = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

$$\Leftrightarrow \cos\lambda T = 1 \Leftrightarrow \lambda T = 2k\pi \Leftrightarrow T = \frac{2k\pi}{\lambda},\ k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy $T = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ là chu kỳ bé nhất.

Bài tập 9. Xét hàm Dirichle:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ khi } x \in Q \\ 1 \text{ khi } x \notin Q \end{cases}$$

Khi đó f(x) là hàm tuần hoàn trên **R** chu kỳ $a \in \mathbf{Q}^+$ tuỳ ý.

Vì trong $\mathbf{Q}^+$ không có số nhỏ nhất nên hàm f(x) không có chu kỳ cơ sở.

Bài tập 10.

a. Hàm số xác định trên D = **R** là tập đối xứng.

Ta có:

$$f(-x) = -x.\sin(-x) = x.\sin x = f(x).$$

Vậy f(x) là hàm chẵn.

b. Hàm số xác định trên D = **R** là tập đối xứng.

Ta có:

$$f(-x) = \cos^2(-x) + 4\sin(-x) = \cos^2 x - 4\sin x \neq \pm f(x).$$

Vậy, hàm số f(x) không chẵn cũng không lẻ.

Bài tập 11. Hàm số xác định trên D = **R** là tập đối xứng.

Ta có:

$$f(-x) = |-x|.\cos(-x) = |x|.\cos x = f(x).$$

Vậy, f(x) là hàm số chẵn.

Bài tập 12.

a. Hàm số xác định trên $D = \mathbf{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ là tập đối xứng.

Ta có:

$$f(-x) = \frac{\cos^{2004n}(-x) + 2004}{\sin(-x)} = -\frac{\cos^{2004n} x + 2004}{\sin x} = -f(x).$$

Vậy f(x) là hàm số lẻ.

b. Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x + \text{tg}x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ (\cos x + 1)\sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy hàm số xác định trên $D = \mathbf{R}\backslash\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$ là tập đối xứng.

Ta có:

$$f(-x) = \frac{-x}{\sin(-x) + \text{tg}(-x)} = \frac{x^2}{\sin x + \text{tg}x} = f(x).$$

Vậy f(x) là hàm số chẵn.

Bài tập 13.

a. Hàm số xác định trên D = **R** là tập đối xứng.

Ta có:

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{6(-x)^6 + 4(-x)^4 + 2(-x)^2 + 1} = \frac{\cos x}{6x^6 + 4x^4 + 2x^2 + 1} = f(x).$$

Vậy f(x) là hàm số chẵn.

b. Hàm số xác định trên D = **R** là tập đối xứng.

Ta có:

$$f(-x) = \sqrt[2005]{\frac{\sin(-x) + \cot g(-x)}{(-x)^2 + 1 - \cos(-x)}} = \sqrt[2005]{\frac{-\sin x - \cot gx}{x^2 + 1 - \cos x}} = -f(x).$$

Vậy f(x) là hàm số lẻ.

Bài tập 14.

a. Hàm số tuần hoàn với chu kỳ π, do vậy ta xét sự biến thiên của hàm số trên đoạn $[0, \pi]$.

Ta có ngay, hàm số $y = \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ nên:

- Nghịch biến trên khoảng $(0, \frac{\pi}{2})$.
- Đồng biến trên khoảng $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

b. Hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π, do vậy ta xét sự biến thiên của hàm số trên đoạn $[0, 2\pi]$.

Ta có, hàm số $y = \cos x$

- Nghịch biến trên khoảng $(0, \pi)$.
- Đồng biến trên khoảng $(\pi, 2\pi)$.

Do đó, hàm số $y = 1 - \cos x$

- Đồng biến trên khoảng $(0, \pi)$.
- Nghịch biến trên khoảng $(\pi, 2\pi)$.

c. Hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\frac{\pi}{3}$, do vậy ta xét sự biến thiên của hàm số trên khoảng $(0, \frac{\pi}{3})$ và trên khoảng này hàm số luôn nghịch biến.

d. Hàm số tuần hoàn với chu kỳ $\frac{\pi}{2}$, do vậy ta xét sự biến thiên của hàm số trên đoạn $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ta có, hàm số $y = \cos 4x$

- Nghịch biến trên khoảng $(0, \frac{\pi}{4})$.
- Đồng biến trên khoảng $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

Do đó, hàm số $y = 1 - \cos 4x$

- Đồng biến trên khoảng $(0, \frac{\pi}{4})$.
- Nghịch biến trên khoảng $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

Bài tập 15. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 16. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 17. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 18. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 19.

a. $\sin 56^0 < \sin 71^0 13'$.

b. $\sin 132^0 21' > \sin 144^0 11'$.

Bài tập 20.

a. $\sin 31^0 18' < \sin 132^0 1'$.

b. $\cos 113^0 < \cos 39^0$.

Bài tập 21. So sánh các cặp số sau:

a. $\cos 102^0 < \sin 111^0$.

b. $\cos 47^0 < \sin 46^0$.

Bài tập 22. So sánh các cặp số sau:

a. $\text{tg}133^0 < \text{tg}145^0$.

b. $\text{cotg}41^0 < \text{cotg}33^0 23'$.

c. $\text{tg}46^0 > \text{cotg}47^0$.

CHỦ ĐỀ 3
CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. CÔNG THỨC CỘNG

a. $\cos(x + y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$

b. $\cos(x - y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y$

c. $\sin(x + y) = \sin x.\cos y + \cos x.\sin y$

d. $\sin(x - y) = \sin x.\cos y - \cos x.\sin y$

e. $tg(x + y) = \dfrac{tgx + tgy}{1 - tgx.tgy}$

f. $tg(x - y) = \dfrac{tgx - tgy}{1 + tgx.tgy}$

2. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

a. $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$

b. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$
$= 1 - 2\sin^2 x$

c. $tg2x = \dfrac{2tgx}{1 - tg^2 x}$

3. CÔNG THỨC NHÂN BA

a. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

b. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

c. $tg3x = \dfrac{(3 - tg^2 x)tgx}{1 - 3tg^2 x}$

4. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

a. $\cos x.\cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$.

b. $\sin x.\sin y = \dfrac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$.

c. $\sin x.\cos y = \dfrac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$.

d. $\cos x.\sin y = \dfrac{1}{2}[\sin(x + y) - \sin(x - y)]$.

5. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

a. $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x + y}{2}\cos\dfrac{x - y}{2}$.

b. $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x + y}{2}\sin\dfrac{x - y}{2}$.

c. $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x + y}{2}\cos\dfrac{x - y}{2}$.

d. $\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x + y}{2}\sin\dfrac{x - y}{2}$.

e. $\text{tg}x + \text{tg}y = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x.\cos y}$.

f. $\text{tg}x - \text{tg}y = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x.\cos y}$.

g. $\text{cotg}x + \text{cotg}y = \dfrac{\sin(x+y)}{\sin x.\sin y}$.

h. $\text{cotg}x - \text{cotg}y = \dfrac{\sin(y-x)}{\sin x.\sin y}$.

6. CÔNG THỨC HẠ BẬC

a. $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

b. $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

c. $\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$.

d. $\cos^3 x = \dfrac{3\cos x + \cos 3x}{4}$.

7. CÔNG THỨC RÚT GỌN

Ta có:

a. $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$ với $\text{cotg}\alpha = \dfrac{b}{a}$.

$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$ với $\text{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$.

b. $a\sin x - b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x-\alpha)$ với $\text{cotg}\alpha = \dfrac{b}{a}$.

$= -\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\alpha)$ với $\text{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$.

Hệ quả:

a. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos(x-\dfrac{\pi}{4})$.

b. $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x-\dfrac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$.

c. Mở rộng:

$$\text{cotg}x + \text{tg}x = \frac{2}{\sin 2x}.$$
$$\text{cotg}x - \text{tg}x = 2\text{cotg}2x.$$

8. CÔNG THỨC TÍNH $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{tg}\alpha$ THEO $\text{tg}\dfrac{\alpha}{2}$

Nếu đặt $t = \text{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, ta được:

- $\sin\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2}$,
- $\cos\alpha = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,
- $\text{tg}\alpha = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Biến đổi biểu thức lượng giác thành tổng.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các công thức lượng giác.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Biến đổi các biểu thức sau thành tổng:

a. $A = \cos a.\cos 2a.\cos 3a$.

b. $B = 2\sin a.\sin 2a.\cos\dfrac{5a}{2}$.

Bài tập 2: Biến đổi biểu thức sau thành tổng:

$$P = 4\cos(a - \frac{\pi}{3}).\sin 2a.\cos(a + \frac{\pi}{3}).$$

Bài toán 2: Biến đổi biểu thức lượng giác thành tích.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Việc biến đổi biểu thức lượng giác về dạng tích phụ thuộc vào các phép biến đổi dạng:

Dạng 1: Biến đổi tổng, hiệu thành tích.

Dạng 2: Biến đổi tích thành tổng.

Dạng 3: Lựa chọn phép biến đổi cho cos2x.

Dạng 4: Phương pháp luận hệ số.

Dạng 5: Phương pháp hằng số biến thiên.

Dạng 6: Phương pháp nhân.

Dạng 7: Sử dụng các phép biến đổi hỗn hợp.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 3: Biến đổi các biểu thức sau thành tích:

a. $A = 2\cos 2a - \sqrt{3}$.

b. $B = \sin 3a - \cos a$.

c. $C = 1 - \text{tg}a$.

d. $D = 1 + 2\sin a - \cos 2a$.

e. $E = 1 + \cos a + \cos 2a$.

Bài tập 4: Biến đổi các biểu thức sau thành tích:

a. $A = 2\sin^3 a - \cos 2a + \cos a$.

b. $B = 3(\text{cotg}a - \cos a) - 5(\text{tg}a - \sin a) - 2$.

c. $C = 9\sin a + 6\cos a - 3\sin 2a + \cos 2a - 8$.

Bài tập 5: Biến đổi các biểu thức sau thành tích:

a. $A = 2\sin 2a - \cos 2a - 7\sin a - 2\cos a + 4$.

b. $B = 1 - \cos ax - \cos 2bx + \cos[(a + 2b)x]$

Bài tập 6: Biến đổi các biểu thức sau thành tích:

a. $A = \cos^4 a - \cos 2a + 2\sin^6 a$.

b. $B = \cos^2 a + \cos^3 a + 2\sin a - 2$.

c. $C = \sin^2 2a - 12(\cos^4 a + tg^2 a) + 36$.

Bài tập 7: Biến đổi các biểu thức sau thành tích:

a. $A = \sin^8 a + \cos^8 a - 2(\sin^{10} a + \cos^{10} a)$.

b. $B = \cos^2 3a + \cos^2 2a - \sin^2 a$.

c. $C = \sin^2 3a - \cos^2 4a - \sin^2 5a + \cos^2 6a$.

Bài tập 8: Biến đổi các biểu thức sau thành tích:

a. $A = (\cos a + 1).\sin^4 \frac{a}{2} - \cos a.\sin^2 \frac{a}{2} - 1$.

b. $B = \cos^5 a + \sin^7 a + \frac{1}{2}(\cos^3 a + \sin^5 a)\sin 2a - (\cos a + \sin a)$.

c. $C = 2(1 - 4\sin^2 a)\sin 3a - 1$, với $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 3: Rút gọn biểu thức lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các công thức lượng giác cùng các phép biến đổi lượng giác.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 9: Rút gọn các biểu thức:

a. $A = \left(\frac{1}{\cos 2x} + 1\right).tgx$.

□ $A = \sin 2x$. □ $A = \cos x$. □ $A = tg2x$. □ $A = cotg2x$.

b. $B = \cos 8x.cotg4x - \frac{\cot g^2 2x - 1}{2\cot g 2x}$.

□ $B = \cos x$. □ $B = \sin 2x$. □ $B = \cos 8x$. □ $B = -\sin 8x$.

Bài tập 10: Rút gọn các biểu thức:

a. $A = \sin a + \sin 2a + ... + \sin na$.

b. $B = \cos a + \cos 2a + ... + \cos na$.

c. $C = \cos^2 a + \cos^2 2a + ... + \cos^2 na$.

d. $D = \sin^2 a + \sin^2 2a + ... + \sin^2 na$.

Bài tập 11: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 - ... - \sqrt{2 - 2\cos x}}}}_{\text{n dấu căn}}, \text{ với } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

□ $A = \cos nx$. □ $A = \sin \frac{x}{2}$. □ $A = \cos \frac{x}{2^n}$. □ $A = \sin \frac{x}{2^n}$.

tập 12: Rút gọn biểu thức:

a. $A = \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + ... + \cos\frac{2n\pi}{2n+1}$.

√+ b. $B = (2\cos a - 1)(2\cos 2a - 1)...(2\cos 2^{n-1}a - 1)$.

++ c. $C = \frac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}} + \frac{1}{4^2\cos^2\frac{a}{2^2}} + ... + \frac{1}{4^n\cos^2\frac{a}{2^n}}$.

d. $D = (1 + \frac{1}{\cos 2a})(1 + \frac{1}{\cos 4a})...(1 + \frac{1}{\cos 2^n a})$.

Bài tập 13: Với $a \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ hãy rút gọn các biểu thức:

a. $A = \frac{1}{\cos a.\cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a.\cos 3a} + ... + \frac{1}{\cos na.\cos(n+1)a}$.

- ❑ $A = \frac{2\sin na}{\cos na.\sin 2a}$.
- ❑ $A = \frac{2\cos na}{\cos(n+1)a.\sin 2a}$.
- ❑ $A = \frac{2\sin na}{\cos(n+1)a.\sin 2a}$.
- ❑ $A = \frac{2\cos na}{\sin(n+1)a.\sin 2a}$.

b. $B = \frac{1}{\sin a.\sin 2a} + \frac{1}{\sin 2a.\sin 3a} + ... + \frac{1}{\sin na.\sin(n+1)a}$.

- ❑ $B = \frac{1}{\sin^2 a}$.
- ❑ $B = \frac{\sin na}{\sin^2 a.\sin(n+1)a}$.
- ❑ $B = \frac{1}{\sin^2(n+1)a}$.
- ❑ $B = \frac{\cos na}{\sin^2 a.\sin(n+1)a}$.

Bài tập 14: Rút gọn các biểu thức:

+a. $A = tga + \frac{1}{2}tg\frac{a}{2} + ... + \frac{1}{2^n}tg\frac{a}{2^n}$.

- ❑ $A = \frac{1}{2^n}tg\frac{a}{2^n} - 2tg2a$.
- ❑ $A = \frac{1}{2^n}tg\frac{a}{2^n}$.
- ❑ $A = \frac{1}{2^n}cotg\frac{a}{2^n} - 2cotg2a$.
- ❑ $A = \frac{1}{2^n}cotg\frac{a}{2^n}$.

b. $B = tga + 2tg2a + ... + 2^n tg2^n a$.

- ❑ $B = tga - 2^n.tg2^n a$.
- ❑ $B = tga - 2^{n+1}.tg2^{n+1}a$.
- ❑ $B = cotga - 2^n.cotg2^n a$.
- ❑ $B = cotga - 2^{n+1}.cotg2^{n+1}a$.

c. $C = tga.tg2a + tg2a.tg3a + ... + tg(n-1)a.tgna$.

- ❑ $C = \frac{tgna}{tga} - n$.
- ❑ $C = \frac{tgna}{cotga} - n$.
- ❑ $C = \frac{cotgna}{cotga} - n$.
- ❑ $C = \frac{cotgna}{tga} - n$.

d. $D = 2 + \frac{\cos 2a}{\cos^2 a} + \frac{\cos 3a}{\cos^3 a} + ... + \frac{\cos na}{\cos^n a}$.

- ❑ $A = \frac{\sin(n+1)a}{\cos^n a.\sin a}$.
- ❑ $A = \frac{\sin(n+1)a}{\sin^n a.\sin a}$.
- ❑ $A = \frac{\cos(n+1)a}{\sin^n a.\cos a}$.
- ❑ $A = \frac{\cos(n+1)a}{\cos^n a.\cos a}$.

Bài toán 4: Chứng minh đẳng thức lượng giác độc lập với biến số.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng các phép biến đổi lượng giác để thực hiện phép rút gọn biểu thức lượng giác.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 15: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$$A = \cos^2(x - \frac{\pi}{3}) + \cos^2 x + \cos^2(x + \frac{\pi}{3}).$$

Bài tập 16: Xác định $a \in (0, \frac{\pi}{2})$ để biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

$$A = \cos x + \cos(x + 2a) + \cos(x + 4a) + \cos(x + 6a).$$

- ❑ $a = \frac{\pi}{6}$.
- ❑ $a = \frac{\pi}{4}$.
- ❑ $a = \frac{\pi}{3}$.
- ❑ Vô nghiệm.

Bài tập 17: Tìm a, b sao cho các biểu thức sau không phụ thuộc x:

a. $A = a.\cos 4x + 4a.\cos 2x + b - \cos^4 x$.

- ❑ a tuỳ ý và $b = \frac{1}{8}$.
- ❑ $a = b = \frac{1}{8}$.
- ❑ $a = \frac{1}{8}$ và b tuỳ ý.
- ❑ $a = -\frac{1}{8}$ và $b = \frac{1}{8}$.

b. $B = 2a.\sin x - a.\sin 3x + b\sin 5x - \sin^5 x$.

- ❑ $a = \frac{1}{16}$ và $b = \frac{15}{16}$.
- ❑ $a = \frac{15}{16}$ và $b = \frac{1}{16}$.
- ❑ $a = b = 0$.
- ❑ Vô nghiệm.

Bài tập 18: Tìm a, b sao cho các biểu thức sau không phụ thuộc x:

a. $A = a.\cos^2 x + b[\cos^2(x + \frac{\pi}{3}) + \cos^2(x - \frac{\pi}{3})] - \frac{3}{2}$.

- ❑ $a = b = \frac{1}{2}$.
- ❑ $a = -\frac{1}{2}$ và $b = \frac{1}{2}$.
- ❑ $a = b$.
- ❑ Vô nghiệm.

b. $B = a(\cos x - 1) - \cos(ax + b^2) + b^2 + 1$.

- ❑ $a = 0$ và b tuỳ ý.
- ❑ a tuỳ ý và $b = 0$.
- ❑ $a = 1$ và b tuỳ ý.
- ❑ a tuỳ ý và $b = 1$.

Bài toán 5: Tính giá trị của biểu thức lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Thực hiện phép biến đổi lượng giác để đơn giản biểu thức cần tính giá trị.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 19: Tính giá trị của biểu thức $A = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha$ biết:

a. $\alpha = \frac{\pi}{24}$.

□ $A = \frac{1}{2}$. □ $A = \frac{5}{8}$. □ $A = \frac{3\sqrt{3}}{16}$. □ $A = \frac{10 + 3\sqrt{3}}{16}$.

b. $\alpha = \frac{5\pi}{12}$.

□ $A = \frac{13}{16}$. □ $A = \frac{1}{2}$. □ $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. □ $A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Bài tập 20: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \sin\frac{\pi}{48}.\cos\frac{\pi}{48}.\cos\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{6}$.

□ $A = \frac{1}{16}$. □ $A = \frac{1}{32}$. □ $A = \frac{\sqrt{2}}{32}$. □ $A = \frac{\sqrt{3}}{32}$.

b. $B = \sin\frac{\pi}{24}.\sin\frac{5\pi}{24}.\sin\frac{7\pi}{24}.\sin\frac{11\pi}{24}$.

□ $B = \frac{1}{32}$. □ $B = \frac{1}{16}$. □ $B = \frac{7}{8}$. □ $B = \frac{1}{2}$.

c. $C = \sin\frac{\pi}{30}.\sin\frac{7\pi}{30}.\sin\frac{13\pi}{30}.\sin\frac{19\pi}{30}.\sin\frac{25\pi}{30}$.

□ $C = 1$. □ $C = \frac{1}{2}$. □ $C = \frac{1}{16}$. □ $C = \frac{1}{32}$.

Bài tập 21: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{6\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}$.

□ $A = -\frac{1}{2}$. □ $A = \frac{1}{2}$. □ $A = \frac{3}{2}$. □ $A = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

b. $B = \sin 10^0.\sin 30^0.\sin 50^0.\sin 70^0$.

□ $B = \frac{1}{16}$. □ $B = \frac{1}{8}$. □ $B = \frac{1}{4}$. □ $B = \frac{1}{2}$.

Bài tập 22: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = tg^2\frac{\pi}{12} + cotg^2\frac{\pi}{12}$.

□ $A = 14$. □ $A = 11$. □ $A = 8$. □ $A = 2\sqrt{3}$.

b. $B = tg^2\frac{\pi}{24} + cotg^2\frac{\pi}{24}$.

□ $A=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. □ $A=\frac{1}{\sqrt{3}}$. □ $A=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$. □ $A=\frac{12+2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$.

Bài tập 23: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{3\pi}{7} + \cos^2\frac{5\pi}{7}$.

□ $A = 1$. □ $A = \frac{1}{2}$. □ $A = \frac{3}{2}$. □ $A = \frac{5}{4}$.

b. $B = \cos^4\frac{\pi}{7} + \cos^4\frac{3\pi}{7} + \cos^4\frac{5\pi}{7}$. (*)

□ $B = \frac{13}{16}$. □ $B = \frac{7}{8}$. □ $B = \frac{3}{4}$. □ $B = \frac{1}{2}$.

c. $C = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{5\pi}{7}}$.

□ $C = 1$. □ $C = 2$. □ $C = 3$. □ $C = 4$.

Bài tập 24: Tính giá trị của các biểu thức:

a. $A = \cos^4\frac{\pi}{14} + \cos^4\frac{3\pi}{14} + \cos^4\frac{5\pi}{14}$.

□ $A = \frac{3}{4}$. □ $A = \frac{7}{8}$. □ $A = \frac{21}{16}$. □ $A = \frac{41}{32}$.

b. $B = \cos^6\frac{\pi}{14} + \cos^6\frac{3\pi}{14} + \cos^6\frac{5\pi}{14}$.

□ $B = \frac{69}{64}$. □ $B = \frac{35}{32}$. □ $B = \frac{17}{16}$. □ $B = \frac{9}{8}$.

Bài tập 25: Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}.$$

□ $A = \frac{3}{4}$. □ $A = \frac{\sqrt[3]{3}}{4}$. □ $A = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$. □ $A=\sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}$.

Bài tập 26: Biết:

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{tg^2 x} + \frac{1}{\cot g^2 x} = 6.$$

Tính giá trị của cos2x.

❑ $\cos 2x = -1$. ❑ $\cos 2x = 0$. ❑ $\cos 2x = \frac{1}{2}$. ❑ $\cos 2x = \frac{2}{3}$.

Bài tập 27: Biết:

$$\begin{cases} \cos a + \cos b = m \\ \sin a + \sin b = n \end{cases}, \text{ với } m, n \neq 0.$$

Tính giá trị của sin(a + b).

❑ $\frac{mn}{m^2 + n^2}$. ❑ $\frac{2mn}{m^2 + n^2}$. ❑ $\frac{m^2 + n^2}{mn}$. ❑ $\frac{m + n}{mn}$.

Bài toán 6: Chứng minh đẳng thức lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta lựa chọn một trong các hướng biến đổi sau:

Hướng 1: Dùng công thức lượng giác biến đổi một vế thành vế còn lại (VT ⇒ VP hoặc VP ⇒ VT). Khi đó:

- Nếu xuất phát từ vế phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
- Nếu xuất phát từ vế đơn giản ta cần thực hiện việc phân tích.

Hướng 2: Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng.

Hướng 3: Biến đổi một đẳng thức đã biết là luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

Để ý rằng một biểu thức lượng giác có thể được biến đổi thành nhiều dạng khác nhau. Chẳng hạn ta có:

$\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x = (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)$.

$\sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)$.

$\sin^2 2x = 4\sin^2 x.\cos^2 x$.

Tuỳ theo mỗi bài toán, ta lựa chọn công thức thích hợp để biến đổi.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 28: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\cos(x \pm n\pi) = (-1)^n \cos x$ với $n \in \mathbb{N}$.

b. $\sin(x \pm n\pi) = (-1)^n \sin x$ với $n \in \mathbb{N}$.

Bài tập 29: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\cos^2(x - y) - \cos^2(x + y) = \sin2x.\sin2y$.

b. $\cos^2(x - y) - \sin^2(x + y) = \cos2x.\cos2y$.

c. $2\cos x.\cos y.\cos(x + y) = \cos^2x + \cos^2y - \sin^2(x + y)$.

Bài tập 30: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\sin^3x.(1 + \text{cotg}x) + \cos^3x.(1 + \text{tg}x) = \sin x + \cos x$.

b. $\sin3x - 2\sin^33x + \cos2x.\sin x = \cos5x.\sin4x$.

c. $\sin^4x + \cos^4(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4})$.

Bài tập 31: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\text{tg}(x - \frac{\pi}{3}) + \text{tg}x + \text{tg}(x + \frac{\pi}{3}) = 3\text{tg}3x$.

Áp dụng tính giá trị của biểu thức:

$$A = \text{tg}1^0 + \text{tg}5^0 + \text{tg}9^0 + ... + \text{tg}177^0.$$

b. $\text{tg}^2(x - \frac{\pi}{3}) + \text{tg}^2x + \text{tg}^2(x + \frac{\pi}{3}) = 9\text{tg}^23x + 6$.

Áp dụng tính giá trị của biểu thức:

$$A = \text{tg}^25^0 + \text{tg}^210^0 + \text{tg}^215^0 + ... + \text{tg}^285^0.$$

c. $\text{tg}x + \text{tg}y + \text{tg}z = \text{tg}x.\text{tg}y.\text{tg}z + \frac{\sin(x+y+z)}{\cos x.\cos y.\cos z}$.

d. $\frac{\text{tg}^3x}{\sin^2x} - \frac{1}{\sin x.\cos x} + \frac{\text{cotg}^3x}{\cos^2x} = \text{tg}^3x + \text{cotg}^3x$.

Bài tập 32: Cho $\sin x + \sin y = 2\sin(x + y)$, với $x + y \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chứng minh rằng $\text{tg}\frac{x}{2}.\text{tg}\frac{y}{2} = \frac{1}{3}$.

Bài tập 33: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $1 + \cos a + \cos2a + ... + \cos na = \frac{1}{\sin\frac{a}{2}}.\cos\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}$.

b. $\sin x + \sin(x + a) + \sin(x + 2a) + ... + \sin(x + na) =$

$$= \frac{1}{\sin\frac{a}{2}}.\sin(x + \frac{na}{2})\sin\frac{(n+1)a}{2}.$$

c. $\cos x + \cos(x + a) + \cos(x + 2a) + ... + \cos(x + na) =$

$$= \frac{1}{\sin\frac{a}{2}}.\cos(x + \frac{na}{2})\sin\frac{(n+1)a}{2}.$$

Bài toán 7: Chứng minh bất đẳng thức lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Muốn chứng minh một bất đẳng thức lượng giác, ta sử dụng các công cụ:

1. Các công thức lượng giác để biến đổi bất đẳng thức lượng giác.
2. Tính chất của các hàm số lượng giác.

$$-1 \le \sin x \le 1 \text{ và } -1 \le \cos x \le 1$$

$$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\sin(x \pm \frac{\pi}{4}) \Rightarrow |\sin x \pm \cos x| \le \sqrt{2}$$

Mở rộng

$$|a.\sin x + b.\cos x| \le \sqrt{a^2+b^2}.$$

3. Các bất đẳng thức đại số và tính chất tam thức bậc hai.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 34: Cho $0 \le x \le y \le \frac{\pi}{2}$ và $x + y = \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

$$x.\sin x + y.\sin y \ge \frac{\pi}{4}(\sin x + \sin y).$$

Bài tập 35: Chứng minh rằng:

a. $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$, với $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b. $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$, với mọi x.

Bài tập 36: Chứng minh rằng với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì:

$$2^{2\sin x} + 2^{\operatorname{tg}x} > 2^{\frac{3x}{2}+1}.$$

Bài tập 37: Cho $0 \le x, y, z \le \pi$, chứng minh rằng:

$$\sin x + \sin y + \sin z \le 3\sin\frac{x+y+z}{3}.$$

Bài tập 38: Cho x, y, z > 0 và thoả mãn $x + y + z < \frac{\pi}{2}$, chứng minh rằng:

$$\operatorname{tg}x.\operatorname{tg}y + \operatorname{tg}y.\operatorname{tg}z + \operatorname{tg}z.\operatorname{tg}x < 1.$$

Bài tập 39: Cho x, y, z > 0 và thoả mãn $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, chứng minh rằng:

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z + 3\sin x.\sin y.\sin z \le \frac{9}{8}.$$

Bài tập 40: Cho $2\cos^2 x - 3\cos x - 3 > 0$, chứng minh rằng $\sin\left(\frac{1}{\cos x}\right) < 0$.

Bài tập 41: Chứng minh rằng với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ luôn có:

$$\operatorname{tg}^7 x + \operatorname{cotg}^7 x \ge \operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}x.$$

Bài toán 8: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức (hàm số) lượng giác

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Sử dụng:

1. Tính bị chặn của các hàm số lượng giác cơ bản:

   $|\sin x| \le 1$ và $0 \le \sin^{2n}x \le 1$, với n nguyên dương.

   $|\cos x| \le 1$ và $0 \le \cos^{2n}x \le 1$, với n nguyên dương.

2. Tính chất của tam thức bậc hai:

   $$ax^2 + bx + c \le -\frac{\Delta}{4a}, \text{ với } a < 0.$$

   $$ax^2 + bx + c \ge -\frac{\Delta}{4a}, \text{ với } a > 0.$$

3. Bất đẳng thức đại số.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 42: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a. $y = \sin x - 1$.

- ❑ $y_{Max} = 1$ và $y_{Min} = -1$.
- ❑ $y_{Max} = 1$ và $y_{Min} = -2$.
- ❑ $y_{Max} = 0$ và $y_{Min} = -2$.
- ❑ $y_{Max} = 0$ và $y_{Min} = -1$.

b. $y = 3\cos 2x + 2$.

- ❑ $y_{Max} = 5$ và $y_{Min} = -1$.
- ❑ $y_{Max} = 2$ và $y_{Min} = 0$.
- ❑ $y_{Max} = 3$ và $y_{Min} = -1$.
- ❑ $y_{Max} = 2$ và $y_{Min} = -3$.

Bài tập 43: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a. $y = -2\sin x + 4$, với $\frac{\pi}{6} < x \le \frac{7\pi}{6}$.

- ❑ $y_{Max} = 5$ và $y_{Min} = 2$.
- ❑ $y_{Max} = 6$ và $y_{Min} = 1$.
- ❑ $y_{Max} = 4$ và $y_{Min} = -2$.
- ❑ $y_{Max} = 2$ và $y_{Min} = -2$.

b. $y = 4\cos 2x - 1$, với $\frac{\pi}{12} \le x < \frac{5\pi}{8}$.

- ❑ $y_{Max} = 3$ và $y_{Min} = -1$.
- ❑ $y_{Max} = 2$ và $y_{Min} = -3$.
- ❑ $y_{Max} = 3$ và $y_{Min} = -5$.
- ❑ $y_{Max} = 1$ và $y_{Min} = -5$.

Bài tập 44: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau:

a. $y = 3\sqrt{1 + \sin x} - 1$.

- ❑ $y_{Max} = 2$ và $y_{Min} = 0$.
- ❑ $y_{Max} = \sqrt{2} - 1$ và $y_{Min} = 0$
- ❑ $y_{Max} = 3\sqrt{2} - 1$ và $y_{Min} = -1$.
- ❑ $y_{Max} = 3\sqrt{2} + 1$ và $y_{Min} = -1$.

b. $y = 2 + 2\sin x + \cos^2 x$.

- ❑ $y_{Max} = 5$ và $y_{Min} = -1$.
- ❑ $y_{Max} = 3$ và $y_{Min} = 1$.
- ❑ $y_{Max} = 4$ và $y_{Min} = 0$.
- ❑ $y_{Max} = 2$ và $y_{Min} = 1$.

c. $y = \sin^2x + 2\sin x + 5$.

- ❑ $y_{Max} = 5$ và $y_{Min} = 1$.
- ❑ $y_{Max} = 8$ và $y_{Min} = 3$.
- ❑ $y_{Max} = 7$ và $y_{Min} = 5$.
- ❑ $y_{Max} = 8$ và $y_{Min} = 4$.

d. $y = \sin x - \cos^2x + \dfrac{1}{2}$.

- ❑ $y_{Max} = \dfrac{1}{2}$ và $y_{Min} = 0$.
- ❑ $y_{Max} = \dfrac{3}{2}$ và $y_{Min} = -\dfrac{3}{4}$.
- ❑ $y_{Max} = \dfrac{1}{2}$ và $y_{Min} = -\dfrac{1}{2}$.
- ❑ $y_{Max} = 2$ và $y_{Min} = -\dfrac{1}{2}$.

Bài tập 45: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a. $y = 2\sin^2x + 4\sin x.\cos x + \sqrt{5}$.

- ❑ $y_{Max} = 2\sqrt{5} - 1$ và $y_{Min} = -1$.
- ❑ $y_{Max} = 2\sqrt{5} - 1$ và $y_{Min} = \sqrt{5}$.
- ❑ $y_{Max} = 2\sqrt{5} + 1$ và $y_{Min} = 1$.
- ❑ $y_{Max} = 2\sqrt{5} + 1$ và $y_{Min} = \sqrt{5}$.

b. $y = a.\cos^4x + b.\sin^4x$ với $0 < a \le b$.

- ❑ $y_{Max} = b$ và $y_{Min} = 0$.
- ❑ $y_{Max} = a$ và $y_{Min} = 0$.
- ❑ $y_{Max} = b$ và $y_{Min} = \dfrac{ab}{a+b}$.
- ❑ $y_{Max} = b$ và $y_{Min} = \dfrac{a-b}{a+b}$.

Bài tập 46: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = a.\sin^2x + b.\sin x.\cos x + c.\cos^2x.$$

Bài tập 47: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a. $y = \dfrac{3\sin x}{2 + \cos x}$.

- ❑ $y_{Max} = 1$ và $y_{Min} = -\sqrt{3}$.
- ❑ $y_{Max} = \sqrt{3}$ và $y_{Min} = -1$.
- ❑ $y_{Max} = \sqrt{3}$ và $y_{Min} = -\sqrt{3}$.
- ❑ $y_{Max} = \sqrt{2}$ và $y_{Min} = -\sqrt{2}$.

b. $y = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$ với $x \in [0, \pi]$.

- ❑ $y_{Max} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ và $y_{Min} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
- ❑ $y_{Max} = \sqrt{3}$ và $y_{Min} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
- ❑ $y_{Max} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ và $y_{Min} = 0$.
- ❑ $y_{Max} = \sqrt{3}$ và $y_{Min} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

c. $y = \dfrac{\cos x}{2 + \sin x}$ với $x \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$.

- ❑ $y_{Max} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ và $y_{Min} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
- ❑ $y_{Max} = \sqrt{3}$ và $y_{Min} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
- ❑ $y_{Max} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ và $y_{Min} = 0$.
- ❑ $y_{Max} = \sqrt{3}$ và $y_{Min} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

d. $y = 1 + \dfrac{3\sin x}{2 + \cos x}$.

☐ $y_{Max} = \sqrt{3}$ và $y_{Min} = -\sqrt{3}$. ☐ $y_{Max} = 1 + \sqrt{3}$ và $y_{Min} = 1 - \sqrt{3}$.

☐ $y_{Max} = \sqrt{3}$ và $y_{Min} = -1$. ☐ $y_{Max} = \sqrt{3}$ và $y_{Min} = 1$.

e. $y = \dfrac{\cos x + 2\sin x + 3}{2\cos x - \sin x + 4}$ với $-\pi < x < \pi$.

☐ $y_{Max} = 3$ và $y_{Min} = 0$. ☐ $y_{Max} = 1$ và $y_{Min} = -1$.

☐ $y_{Max} = 2$ và $y_{Min} = \dfrac{2}{11}$. ☐ $y_{Max} = \dfrac{5}{2}$ và $y_{Min} = \dfrac{1}{2}$.

Bài tập 48: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y = \sin\frac{2x}{1+x^2} + \cos\frac{4x}{1+x^2} + 1.$$

☐ $y_{Max} = 3$ và $y_{Min} = 1$.

☐ $y_{Max} = 2$ và $y_{Min} = -1$.

☐ $y_{Max} = \dfrac{17}{8}$ và $y_{Min} = -2\sin^2 1 - \sin 1 + 2$.

☐ $y_{Max} = 4$ và $y_{Min} = 2\sin^2 1 + \sin 1 - 2$.

Bài tập 49: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}.$$

☐ $y_{Max} = 2$ và $y_{Min} = 0$. ☐ $y_{Max} = 1$ và $y_{Min} = 0$.

☐ $y_{Max} = \sqrt[4]{8}$ và $y_{Min} = 1$. ☐ $y_{Max} = 2\sqrt{2}$ và $y_{Min} = 1$.

Bài tập 50: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y = \sqrt{1 + 2\cos x} + \sqrt{1 + 2\sin x}.$$

☐ $y_{Max} = 1 + \sqrt{3}$. ☐ $y_{Max} = 2\sqrt{3}$.

☐ $y_{Max} = 2\sqrt{1 + \sqrt{2}}$. ☐ $y_{Max} = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$.

Bài tập 51: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a. $y = \sin^{10}x + \cos^{10}x$.

☐ $y_{Max} = 1$ và $y_{Min} = 0$. ☐ $y_{Max} = 2$ và $y_{Min} = 0$.

☐ $y_{Max} = 1$ và $y_{Min} = \dfrac{1}{16}$. ☐ $y_{Max} = 2$ và $y_{Min} = \dfrac{1}{16}$.

b. $y = 2(1 + \sin 2x.\cos 4x) - \dfrac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x)$.

☐ $y_{Max} = 5$ và $y_{Min} = 1$. ☐ $y_{Max} = 4$ và $y_{Min} = 0$.

☐ $y_{Max} = 2$ và $y_{Min} = \dfrac{1}{2}$. ☐ $y_{Max} = \dfrac{5}{2}$ và $y_{Min} = -1$.

Bài tập 52: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \text{ với } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

❑ $y_{Min} = 0$. ❑ $y_{Min} = 1$. ❑ $y_{Min} = \sqrt{2}$. ❑ $y_{Min} = 2\sqrt{2}$.

Bài tập 53: Cho hàm số :

$$y = \frac{2k\cos x + k + 1}{\cos x + \sin x + 2}.$$

a. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số với k = 1.

❑ $y_{Max} = 2$ và $y_{Min} = 0$. ❑ $y_{Max} = 4$ và $y_{Min} = 1$.

❑ $y_{Max} = 3$ và $y_{Min} = -1$. ❑ $y_{Max} = 1$ và $y_{Min} = 0$.

b. Xác định k sao cho giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.

❑ $k = 2$. ❑ $k = 1$. ❑ $k = \frac{1}{2}$. ❑ $k = \frac{1}{3}$.

Bài tập 54: Tìm k để giá trị nhỏ nhất của hàm số sau nhỏ hơn −1:

$$y = \frac{k\sin x + 1}{\cos x + 2}$$

Bài tập 55: Cho hàm số:

$$y = \frac{a\cos 3x - \sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}.$$

a. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

b. Xác định a để giá trị lớn nhất của hàm số nhỏ hơn hoặc bằng 1.

Bài tập 56: Với $a \geq 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{a + \cos x} + \sqrt{a + \sin x}.$$

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = \frac{1}{2}(\cos 3a + \cos a).\cos 3a = \frac{1}{2}(\cos^2 3a + \cos 3a.\cos a)$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(1 + \cos 6a) + \frac{1}{2}(\cos 4a + \cos 2a)] = \frac{1}{4}(1 + \cos 6a + \cos 4a + \cos 2a).$$

b. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$B = (\cos a - \cos 3a).\cos\frac{5a}{2} = \cos\frac{5a}{2}.\cos a - \cos 3a.\cos\frac{5a}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\cos\frac{7a}{2} + \cos\frac{3a}{2}) - \frac{1}{2}(\cos\frac{11a}{2} + \cos\frac{a}{2})$$

$$= \frac{1}{2}(\cos\frac{7a}{2} + \cos\frac{3a}{2} - \cos\frac{11a}{2} - \cos\frac{a}{2}).$$

Bài tập 2. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$P = 4\cos(a + \frac{\pi}{3}).\cos(a - \frac{\pi}{3}).\sin 2a = 2(\cos 2a + \cos\frac{2\pi}{3}).\sin 2a$$
$$= \sin 4a - \sin 2a.$$

Bài tập 3.

a. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = 2(\cos 2a - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos 2a - \cos\frac{\pi}{6}) = -4\sin(a + \frac{\pi}{12}).\sin(a - \frac{\pi}{12}).$$

b. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$B = \sin 3a - \sin(\frac{\pi}{2} - a) = 2\cos(a + \frac{\pi}{4}).\sin(2a - \frac{\pi}{4}).$$

c. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$C = \text{tg}\frac{\pi}{4} - \text{tg}a = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - a)}{\cos\frac{\pi}{4}.\cos a} = \frac{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - a)}{\cos a}.$$

d. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$D = 1 + 2\sin a - (1 - 2\sin^2 a) = 2\sin^2 a + 2\sin a = 2(\sin a + 1)\sin a.$$

e. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$E = 1 + \cos a + 2\cos^2 a - 1 = (2\cos a + 1)\cos a.$$

Bài tập 4.

a. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$A = 2\sin^3 a - 1 + 2\sin^2 a + \cos a = 2(\sin a + 1)\sin^2 a + \cos a - 1 = 0$$
$$= 2(\sin a + 1)(1 - \cos^2 a) + \cos a - 1$$
$$= (1 - \cos a)[2(\sin a + 1)(1 + \cos a) - 1]$$
$$= (1 - \cos a)[1 + 2\sin a.\cos a + 2(\sin a + \cos a)]$$
$$= (1 - \cos a)[(\sin a + \cos a)^2 + 2(\sin a + \cos a)]$$
$$= (1 - \cos a)(\sin a + \cos a)(\sin a + \cos a + 2).$$

b. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$B = 3(\text{cotg}a - \cos a + 1) - 5(\text{tg}a - \sin a + 1)$$
$$= 3(\frac{\cos a}{\sin a} - \cos a + 1) - 5(\frac{\sin a}{\cos a} - \sin a + 1)$$
$$= \frac{3(\cos a - \sin a.\cos a + \sin a)}{\sin a} - \frac{5(\sin a - \sin a.\cos a + \cos a)}{\cos a}$$
$$= (\sin a + \cos a - \sin a.\cos a)(\frac{3}{\sin a} - \frac{5}{\cos a}).$$

c. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$C = 9\sin a - 9 + 6\cos a - 6\sin a.\cos a + \cos 2a + 1$$
$$= 9(\sin a - 1) - 6\cos a(\sin a - 1) + 2\cos^2 a$$
$$= 9(\sin a - 1) - 6\cos a(\sin a - 1) - 2(\sin^2 a - 1)$$
$$= (\sin a - 1)(9 - 6\cos a - 2\sin a - 2) = (\sin a - 1)(7 - 6\cos a - 2\sin a).$$

Bài tập 5.

a. Biến đổi biểu thức về dạng:

$A = 2\sin 2a - \cos 2a - 7\sin a + 2\cos a + 4.$

$A = 4\sin a.\cos a - 2\cos a - 1 + 2\sin^2 a - 7\sin a + 4$

$= 4\sin a.\cos a - 2\cos a + 2\sin^2 a - 7\sin a + 3$

$= 2\cos a(2\sin a - 1) + (2\sin a - 1)(\sin a - 3)$

$= (2\sin a - 1)(2\cos a + \sin a - 3).$

b. · Biến đổi biểu thức về dạng:

$B = (1 - \cos ax) + [\cos(a + 2b)x - \cos 2bx]$

$= 2\sin^2\frac{ax}{2} - 2\sin(\frac{a}{2} + 2b)x.\sin\frac{ax}{2} = 2[\sin\frac{ax}{2} - \sin(\frac{a}{2} + 2b)x].\sin\frac{ax}{2}$

$= 4\cos(\frac{a}{2} + b)x.\sin(-bx).\sin\frac{ax}{2} = -4\cos(\frac{a}{2} + b)x.\sin bx.\sin\frac{ax}{2}.$

Bài tập 6. Biến đổi các biểu thức sau thành tích:

a. Biến đổi biểu thức về dạng:

$A = \cos^4 a - \cos^2 a + \sin^2 a + 2\sin^6 a = (\cos^2 a - 1)\cos^2 a + \sin^2 a + 2\sin^6 a$

$= -\sin^2 a.\cos^2 a + \sin^2 a + 2\sin^6 a = (1 - \cos^2 a)\sin^2 a + 2\sin^6 a$

$= \sin^4 a + 2\sin^6 a = (2\sin^2 a + 1).\sin^4 a.$

b. Biến đổi biểu thức về dạng:

$B = (1 + \cos a)\cos^2 a - 2(1 - \sin a) = (1 + \cos a)(1 - \sin^2 a) - 2(1 - \sin a)$

$= [(1 + \cos a)(1 + \sin a) - 2](1 - \sin a)$

$= (\cos a + \sin a + \sin a.\cos a - 1)(1 - \sin a).$

c. Biến đổi biểu thức về dạng:

$C = \sin^2 2a - 12(\cos^4 a + tg^2 a) + 36.$

Bài tập 7.

a. Biến đổi biểu thức về dạng:

$A = (\sin^8 a - 2\sin^{10} a) + (\cos^8 a - 2\cos^{10} a) = (1 - 2\sin^2 a)\sin^8 a + (1 - 2\cos^2 a)\cos^8 a$

$= \cos 2a.\sin^8 a - \cos 2a.\cos^8 a = (\sin^8 a - \cos^8 a)\cos 2a$

$= (\sin^4 a - \cos^4 a)(\sin^4 a + \cos^4 a)\cos 2a$

$= (\sin^2 a - \cos^2 a)(\sin^2 a + \cos^2 a)(\sin^4 a + \cos^4 a)\cos 2a$

$= -(\sin^4 a + \cos^4 a)\cos^2 2a.$

b. Biến đổi biểu thức về dạng:

$B = \frac{1}{2}(1 + \cos 6a) + \cos^2 2a - \frac{1}{2}(1 - \cos 2a) = \frac{1}{2}(\cos 6a + \cos 2a) + \cos^2 2a$

$= \cos 4a.\cos 2a + \cos^2 2a = (\cos 4a + \cos 2a)\cos 2a = 2\cos 3a.\cos a.\cos 2a.$

c. Biến đổi biểu thức về dạng:

$C = \frac{1}{2}(1 - \cos 6a) - \frac{1}{2}(1 + \cos 8a) - \frac{1}{2}(1 - \cos 10a) + \frac{1}{2}(1 + \cos 12a)$

$= \frac{1}{2}(\cos 12a - \cos 6a) + \frac{1}{2}(\cos 10a - \cos 8a) = -\sin 9a.\sin 3a - \sin 9a.\sin a$

$= -(\sin 3a + \sin a)\sin 9a = -2\sin 2a.\cos a.\sin 9a.$

Bài tập 8.

a. Đặt $t = \sin^2\frac{a}{2}$, khi đó biểu thức được viết lại dưới dạng:

$$A = (\cos a + 1).t^2 - t.\cos a - 1.$$

Phương trình A = 0 có nghiệm theo t là t = 1 và $t = -\frac{1}{\cos a + 1}$ do đó A được phân tích thành:

$$A = (t - 1)[(\cos a + 1).t + 1] = (\sin^2\frac{a}{2} - 1)(2\cos^2\frac{a}{2}.\sin^2\frac{a}{2} + 1)$$

$$= (\sin^2\frac{a}{2} - 1)(\frac{1}{2}\sin^2 a + 1).$$

b. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$B = \cos^5 a + \sin^7 a + (\cos^3 a + \sin^5 a)\sin a.\cos a - (\cos a + \sin a)$$
$$= \cos^5 a + \sin^7 a + \cos^4 a.\sin a + \sin^6 a.\cos a - (\cos a + \sin a)$$
$$= \cos^4 a(\cos a + \sin a) + \sin^6 a(\cos a + \sin a) - (\cos a + \sin a)$$
$$= (\cos a + \sin a)(\sin^6 a + \cos^4 a - 1)$$
$$= (\cos a + \sin a)[\sin^6 a + (\cos^2 a - 1)(\cos^2 a + 1)]$$
$$= (\cos a + \sin a)[\sin^6 a - \sin^2 a(\cos^2 a + 1)]$$
$$= \sin^2 a(\cos a + \sin a)(\sin^4 a - \cos^2 a - 1) = \sin^2 a(\cos a + \sin a)(\sin^4 a + \sin^2 a - 2).$$

c. Với $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ thì $\cos a \neq 0$. Ta nhân cả hai vế của biểu thức với $\cos a \neq 0$ được:

$$C.\cos a = 2(1 - 4\sin^2 a)\sin 3a.\cos a - \cos a$$
$$= 2\sin 3a.(4\cos^2 a - 3).\cos a - \cos a = 2\sin 3a.(4\cos^3 a - 3\cos a) - \cos a$$
$$= 2\sin 3a.\cos 3a - \cos a = \sin 6a - \sin(\frac{\pi}{2} - a)$$
$$= 2\cos(\frac{5a}{2} + \frac{\pi}{4}).\sin(\frac{7a}{2} - \frac{\pi}{4}).$$

Bài tập 9.

a. Ta biến đổi:

$$A = \frac{1 + \cos 2x}{\cos 2x}.\mathrm{tg}x = \frac{2\cos^2 x}{\cos 2x}.\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2\cos x.\sin x}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \mathrm{tg}2x.$$

b. Ta biến đổi:

$$B = \cos 8x.\mathrm{cotg}4x - \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{2\cos 2x.\sin 2x} = \cos 8x.\frac{\cos 4x}{\sin 4x} - \frac{\cos 4x}{\sin 4x}$$

$$= (\cos 8x - 1)\frac{\cos 4x}{\sin 4x} = -2\sin^2 4x.\frac{\cos 4x}{\sin 4x} = -2\sin 4x.\cos 4x = -\sin 8x.$$

Bài tập 10.

a. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ thì:

$$\sin a = \sin 2a = ... = \sin na = 0 \Rightarrow S = 0.$$

Trường hợp 2: Nếu $a \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ thì nhân cả hai vế của **biểu thức** với $2\sin\frac{a}{2}$, ta được:

$$2A\sin\frac{a}{2} = 2\sin a.\sin\frac{a}{2} + 2\sin 2a.\sin\frac{a}{2} + ... + 2\sin na.\sin\frac{a}{2}$$

$$= \cos\frac{a}{2} - \cos\frac{3a}{2} + \cos\frac{3a}{2} - \cos\frac{5a}{2} + ... + \cos\frac{(2n-1)a}{2} - \cos\frac{(2n+1)a}{2}$$

$$= \cos\frac{a}{2} - \cos\frac{(2n+1)a}{2} = 2\sin\frac{na}{2}.\sin\frac{(n+1)a}{2}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{\sin\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

b. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ thì:

$$\cos a = \cos 2a = ... = \cos na = 1 \Rightarrow S = n.$$

Trường hợp 2: Nếu $a \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ thì nhân cả hai vế của biểu thức với $2\sin\frac{a}{2}$, ta được:

$$2B\sin\frac{a}{2} = 2\cos a.\sin\frac{a}{2} + 2\cos 2a.\sin\frac{a}{2} + ... + 2\cos na.\sin\frac{a}{2}$$

$$= \sin\frac{3a}{2} - \sin\frac{a}{2} + \sin\frac{5a}{2} - \sin\frac{3a}{2} + ... + \sin\frac{(2n+1)a}{2} - \sin\frac{(2n-1)a}{2}$$

$$= \sin\frac{(2n+1)a}{2} - \sin\frac{a}{2} = 2\sin\frac{na}{2}.\cos\frac{(n+1)a}{2}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{\sin\frac{na}{2}\cos\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

c. Ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$C = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a) + \frac{1}{2}(1 + \cos 4a) + ... + \frac{1}{2}(1 + \cos 2na)$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 4a + ... + \cos 2na).$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ thì:

$$\cos 2a = \cos 4a = ... = \cos 2na = 1 \Rightarrow C = n.$$

Trường hợp 2: Nếu $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ thì ta đi tính tổng $T = \cos 2a + \cos 4a + ... + \cos 2na$ bằng cách nhân cả hai vế của biểu thức với 2sina, ta được:

$$2T.\sin a = 2\cos 2a.\sin a + 2\cos 4a.\sin a + ... + 2\cos 2na.\sin a$$
$$= \sin 3a - \sin a + \sin 5a - \sin 3a + ... + \sin(2n+1)a - \sin(2n-1)a$$
$$= \sin(2n+1)a - \sin a = 2\cos(n+1)a.\sin na$$
$$\Leftrightarrow T = \frac{\cos(n+1)a.\sin na}{\sin a}.$$

Từ đó, suy ra:

$$C = \frac{n}{2} + \frac{\cos(n+1)a.\sin na}{2\sin a}.$$

d. Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$D = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a) + \frac{1}{2}(1 - \cos 4a) + ... + \frac{1}{2}(1 - \cos 2na)$$
$$= \frac{n}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 4a + ... + \cos 2na).$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ thì:

$$\cos 2a = \cos 4a = ... = \cos 2na = 1 \Rightarrow D = 0.$$

Trường hợp 2: Nếu $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ thì ta tính được tổng:

$$T = \cos 2a + \cos 4a + ... + \cos 2na = \frac{\cos(n+1)a.\sin na}{\sin a}$$

như trong câu c). Từ đó, suy ra:

$$D = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)a.\sin na}{2\sin a}.$$

Cách 2: Sử dụng kết quả trong câu c) ta nhận xét rằng:

$$C + D = (\cos^2 a + \sin^2 a) + (\cos^2 2a + \sin^2 2a) + ... + (\cos^2 na + \sin^2 na) = n$$
$$\Rightarrow D = n - C = \begin{cases} 0 & \text{nếu } a \neq k\pi \\ \dfrac{n}{2} - \dfrac{\cos(n+1)a.\sin na}{2\sin a} & \text{nếu } a \neq k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Bài tập 11. Ta có $2 - 2\cos x = 2(1 - \cos x) = 4\sin^2\frac{x}{2}$

suy ra:

$$\sqrt{2 - 2\cos x} = \sqrt{4\sin^2\frac{x}{2}} \overset{0 \le \frac{x}{2} \le \pi}{=} 2\sin\frac{x}{2}$$
$$\underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 - 2\cos x}}}_{2\text{ dấu căn}} = 2\sin\frac{x}{2^2}$$
$$...$$
$$\underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 - ... - \sqrt{2 - 2\cos x}}}}_{n\text{ dấu căn}} = 2\sin\frac{x}{2^n}.$$

Vậy, ta được:

$$A = \frac{1}{2}.2\sin\frac{x}{2^n} = \sin\frac{x}{2^n}.$$

Bài tập 12.

a. Đặt $a = \frac{2\pi}{2n+1}$ thì biểu thức được viết lại dưới dạng:

$$A = \cos a + \cos 2a + ... + \cos na = \begin{cases} n & \text{nếu } a = 2k\pi \\ \dfrac{\sin\frac{na}{2}\cos\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}} & \text{nếu } a \neq 2k\pi \end{cases} = -\frac{1}{2}.$$

b. Nhận xét rằng:

$$(2\cos x + 1)(2\cos x - 1) = 4\cos^2 x - 1 = 2(1 + \cos 2x) - 1 = 2\cos 2x + 1.$$

Từ đó, ta đi xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ thì $B = 0$.

Trường hợp 2: Nếu $a \neq \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ thì bằng cách nhân cả hai vế của biểu thức với $2\cos a + 1$, ta được:

$$B(2\cos a + 1) = (2\cos a + 1)(2\cos a - 1)(2\cos 2a - 1)... (2\cos 2^{n-1}a - 1)$$
$$= (2\cos 2a + 1)(2\cos 2a - 1)... (2\cos 2^{n-1}a - 1)$$
$$= (2\cos 4a + 1)... (2\cos 2^{n-1}a - 1) = 2\cos 2^n a + 1$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{2\cos 2^n a + 1}{2\cos a + 1}.$$

c. Nhận xét rằng:

$$\frac{1}{4\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{4\cos^2 x.\sin^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{4\cos^2 x.\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 2x} - \frac{1}{4\sin^2 x}.$$

Từ đó, suy ra:

$$\frac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{4\sin^2\frac{a}{2}},$$

$$\frac{1}{4^2\cos^2\frac{a}{2^2}} = \frac{1}{4\sin^2\frac{a}{2}} - \frac{1}{4^2\sin^2\frac{a}{2^2}},$$

...

$$\frac{1}{4^n\cos^2\frac{a}{2^n}} = \frac{1}{4^{n-1}\cos^2\frac{a}{2^{n-1}}} - \frac{1}{4^n\sin^2\frac{a}{2^n}}.$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên, ta được:

$$C = \frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{4^n \sin^2 \frac{a}{2^n}}.$$

d. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$D = \frac{1+\cos 2a}{\cos 2a} \cdot \frac{1+\cos 4a}{\cos 4a} \ldots \frac{1+\cos 2^n a}{\cos 2^n a}$$

$$= \frac{2\cos^2 a}{\cos 2a} \cdot \frac{2\cos^2 2a}{\cos 4a} \ldots \frac{2\cos^2 2^{n-1} a}{\cos 2^n a} = \frac{2^n \cos a.\cos 2a \ldots \cos 2^{n-1} a}{\cos 2^n a}.$$

Bài tập 13.

a. Nhân cả hai vế của biểu thức với sina, ta được:

$$A\sin a = \frac{\sin a}{\cos a.\cos 2a} + \frac{\sin a}{\cos 2a.\cos 3a} + \ldots + \frac{\sin a}{\cos na.\cos(n+1)a}$$

$$= \frac{\sin(2a-a)}{\cos a.\cos 2a} + \frac{\sin(3a-2a)}{\cos 2a.\cos 3a} + \ldots + \frac{\sin[(n+1)a - na]}{\cos na.\cos(n+1)a}$$

$$= tg2a - tga + tg3a - tg2a + \ldots + tg(n+1)a - tgna$$

$$= tg(n+1)a - tga = \frac{\sin na}{\cos(n+1)a.\cos a}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{\sin na}{\cos(n+1)a.\cos a.\sin a} = \frac{2\sin na}{\cos(n+1)a.\sin 2a}.$$

b. Nhân cả hai vế của biểu thức với sina, ta được:

$$B\sin a = \frac{\sin a}{\sin a.\sin 2a} + \frac{\sin a}{\sin 2a.\sin 3a} + \ldots + \frac{\sin a}{\sin na.\sin(n+1)a}$$

$$= \frac{\sin(2a-a)}{\sin a.\sin 2a} + \frac{\sin(3a-2a)}{\sin 2a.\sin 3a} + \ldots + \frac{\sin[(n+1)a - na]}{\sin na.\sin(n+1)a}$$

$$= cotga - cotg2a + cotg2a - cotg3a + \ldots + cotgna - cotg(n+1)a$$

$$= cotga - cotg(n+1)a = \frac{\sin na}{\sin a.\sin(n+1)a}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{\sin na}{\sin^2 a.\sin(n+1)a}.$$

Bài tập 14.

a. Nhận xét rằng:

$$cotgx - tgx = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x.\cos x} = \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} = 2cotg2x$$

$$\Leftrightarrow tgx = cotgx - 2cotg2x.$$

Từ đó, ta có các kết quả:

$\text{tg}a = \text{cotg}a - 2\text{cotg}2a,$

$\frac{1}{2}\text{tg}\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\text{cotg}\frac{a}{2} - \text{cotg}a,$

...

$\frac{1}{2^n}\text{tg}\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n}\text{cotg}\frac{a}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}\text{cotg}\frac{a}{2^{n-1}}.$

Cộng theo vế các đẳng thức trên, ta được:

$$A = \frac{1}{2^n}\text{cotg}\frac{a}{2^n} - 2\text{cotg}2a.$$

b. Nhận xét rằng:

$$\text{cotg}x - \text{tg}x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x.\cos x} = \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} = 2\text{cotg}2x$$

$\Leftrightarrow \text{tg}x = \text{cotg}x - 2\text{cotg}2x.$

Từ đó, ta có các kết quả:

$\text{tg}a = \text{cotg}a - 2\text{cotg}2a,$

$2\text{tg}2a = 2\text{cotg}2a - 2^2\text{cotg}2^2a,$

...

$2^n\text{tg}2^na = 2^n\text{cotg}2^na - 2^{n+1}\text{cotg}2^{n+1}a.$

Cộng theo vế các đẳng thức trên, ta được:

$$B = \text{cotg}a - 2^{n+1}.\text{cotg}2^{n+1}a.$$

c. Ta có:

$$\text{tg}a = \text{tg}[(k+1) - k]a = \frac{\text{tg}(k+1)a - \text{tgk}a}{1 + \text{tg}(k+1)a.\text{tgk}a}$$

$$\Leftrightarrow \text{tgk}a.\text{tg}(k+1)a = \frac{\text{tg}(k+1)a - \text{tgk}a}{\text{tg}a} - 1$$

Do đó:

$$\text{tg}a.\text{tg}2a = \frac{\text{tg}2a - \text{tg}a}{\text{tg}a} - 1$$

$$\text{tg}2a.\text{tg}3a = \frac{\text{tg}3a - \text{tg}2a}{\text{tg}a} - 1$$

...

$$\text{tg}(n-1)a.\text{tgn}a = \frac{\text{tgn}a - \text{tg}(n-1)a}{\text{tg}a} - 1$$

Suy ra:

$$C = \frac{\text{tgn}a - \text{tg}a}{\text{tg}a} - (n-1) = \frac{\text{tgn}a}{\text{tg}a} - n.$$

d. Ta có:

$$\frac{\cos ka}{\cos^k a} = \frac{\cos ka.\sin a}{\cos^k a.\sin a} = \frac{\frac{1}{2}[\sin(k+1)a - \sin(k-1)a]}{\cos^k a.\sin a}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k+1)a}{\cos^k a.\sin a} - \frac{\sin(k-1)a}{\cos^k a.\sin a}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k+1)a}{\cos^k a.\sin a} - \frac{\sin ka.\cos a - \cos ka.\sin a}{\cos^k a.\sin a}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k+1)a}{\cos^k a.\sin a} - \frac{\sin ka}{\cos^{k-1} a.\sin a}\right] + \frac{1}{2}\frac{\cos ka}{\cos^k a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos ka}{\cos^k a} - \frac{1}{2}\frac{\cos ka}{\cos^k a} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k+1)a}{\cos^k a.\sin a} - \frac{\sin ka}{\cos^{k-1} a.\sin a}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos ka}{\cos^k a} = \frac{\sin(k+1)a}{\cos^k a.\sin a} - \frac{\sin ka}{\cos^{k-1} a.\sin a} = \frac{1}{\sin a}\left[\frac{\sin(k+1)a}{\cos^k a} - \frac{\sin ka}{\cos^{k-1} a}\right]$$

Từ đó, suy ra:

$$A = 2 + \frac{1}{\sin a}\left[\frac{\sin 3a}{\cos^2 a} - \frac{\sin 2a}{\cos a}\right] + ... + \frac{1}{\sin a}\left[\frac{\sin(n+1)a}{\cos^n a} - \frac{\sin na}{\cos^{n-1} a}\right]$$

$$= 2 + \frac{1}{\sin a}\left[\frac{\sin(n+1)a}{\cos^n a} - \frac{\sin 2a}{\cos a}\right] = 2 + \frac{\sin(n+1)a}{\cos^n a.\sin a} - \frac{2\sin a.\cos a}{\cos a.\sin a}$$

$$= \frac{\sin(n+1)a}{\cos^n a.\sin a}.$$

Bài tập 15. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách biến đổi sau:

Cách 1: Ta biến đổi:

$$A = (\cos x.\cos\frac{\pi}{3} + \sin x.\sin\frac{\pi}{3})^2 + \cos^2 x + (\cos x.\cos\frac{\pi}{3} - \sin x.\sin\frac{\pi}{3})^2$$

$$= (\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2 + \cos^2 x + (\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)^2$$

$$= \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{3}{2}\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{3}{2}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{3}{2}.$$

Vậy, biểu thức A không phụ thuộc vào x.

Cách 2: Ta biến đổi:

$$A = \frac{1}{2}[1 + \cos(2x - \frac{2\pi}{3})] + \cos^2 x + \frac{1}{2}[1 + \cos(2x + \frac{2\pi}{3})]$$

$$= 1 + \cos^2 x + \frac{1}{2}[\cos(2x + \frac{2\pi}{3}) + \cos(2x - \frac{2\pi}{3})]$$

$$= 1 + \cos^2 x + \cos 2x.\cos\frac{2\pi}{3} = 1 + \cos^2 x - \frac{1}{2}(2\cos^2 x - 1) = \frac{3}{2}.$$

Bi tập 16. Ta biến đổi:

$$A = \cos x + \cos(x + 6a) + \cos(x + 2a) + \cos(x + 4a)$$
$$= 2\cos(x + 3a).\cos 3a + 2\cos(x + 3a).\cos a$$
$$= 2(\cos 3a + \cos a)\cos(x + 3a).$$

. Để biểu thức không phụ thuộc vào x điều kiện là:

$$\cos 3a + \cos a = 0 \Leftrightarrow \cos 3a = \cos(\pi - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a = \pi - a + 2k\pi \\ 3a = -\pi + a + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ a = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \overset{a \in (0, \frac{\pi}{2})}{\Leftrightarrow} a = \frac{\pi}{4}.$$

Vậy, với $a = \frac{\pi}{4}$ biểu thức không phụ thuộc vào x.

Bi tập 17.

a. $a = \frac{1}{8}$ và b tuỳ ý.

b. $a = \frac{15}{16}$ và $b = \frac{1}{16}$.

Bi tập 18.

a. $a = b$.

b. $a = 0$ và b tuỳ ý.

Bi tập 19. Ta biến đổi:

$$A = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - 3(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$$
$$= 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 4\alpha) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4\alpha$$

a. Với $\alpha = \frac{\pi}{24}$ ta được $A = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{5}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{16} = \frac{10 + 3\sqrt{3}}{16}$.

b. Với $\alpha = \frac{5\pi}{12}$ ta được $A = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos\frac{5\pi}{3} = \frac{5}{8} + \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$.

Bi tập 20.

a. Ta có:

$$A = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{24}.\cos\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{6}.\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{16}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{32}.$$

b. $B = \frac{1}{16}$.

c. $C = \frac{1}{32}$.

Bi tập 21.

a. $A = -\frac{1}{2}$.

b. $B = \frac{1}{16}$.

Bài tập 22. Ta xét biểu thức:

$$S = tg^2a + cotg^2a = \frac{\sin^4 a + \cos^4 a}{\sin^2 a.\cos^2 a} = \frac{(\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 2\sin^2 a.\cos^2 a}{\sin^2 a.\cos^2 a}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2a}{\frac{1}{4}\sin^2 2a} = \frac{4 - 2\sin^2 2a}{\sin^2 2a} = \frac{4 - (1 - \cos 4a)}{\frac{1}{2}(1 - \cos 4a)} = \frac{6 + 2\cos 4a}{1 - \cos 4a}.$$

a. Suy ra:

$$A = tg^2\frac{\pi}{12} + cotg^2\frac{\pi}{12} = \frac{6 + 2\cos\frac{\pi}{3}}{1 - \cos\frac{\pi}{3}} = \frac{6+1}{1 - \frac{1}{2}} = 14.$$

b. Suy ra:

$$B = tg^2\frac{\pi}{24} + cotg^2\frac{\pi}{24} = \frac{6 + 2\cos\frac{\pi}{6}}{1 - \cos\frac{\pi}{6}} = \frac{6 + \sqrt{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12 + 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}.$$

Bài tập 23. Nhận xét rằng $\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}$ là nghiệm của phương trình:

$7x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$ (1)

Ta sẽ đi xây dựng phương trình đại số nhận $a = \cos\frac{\pi}{7}$, $b = \cos\frac{3\pi}{7}$, $c = \cos\frac{5\pi}{7}$ làm nghiệm bằng cách:

$(1) \Leftrightarrow 4x = \pi - 3x + 2k\pi \Leftrightarrow \cos4x = \cos(\pi - 3x + 2k\pi)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 = -\cos3x \Leftrightarrow 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 3\cos x - 4\cos^3 x$

$\Leftrightarrow 8\cos^4 x + 4\cos^3 x - 8\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(8\cos^3 x - 4\cos^2 x - 4\cos x + 1) = 0$

$\Rightarrow 8\cos^3 x - 4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0.$

Từ đó, theo định lí Viét ta được:

$$\begin{cases} a + b + c = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2} \\ ab + bc + ca = \cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}.\cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7} = -\frac{1}{2} \\ abc = \cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{3\pi}{7}.\cos\frac{5\pi}{7} = -\frac{1}{8} \end{cases}.$$

a. Ta suy ra:

$$A = \cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{3\pi}{7} + \cos^2\frac{5\pi}{7}$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}.$$

b. Ta suy ra:

$$B = \cos^4\frac{\pi}{7} + \cos^4\frac{3\pi}{7} + \cos^4\frac{5\pi}{7} = a^4 + b^4 + c^4$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2[(ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c) = \frac{13}{16}.$$

c. Ta suy ra:

$$C = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{5\pi}{7}} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ca}{abc} = 4.$$

Bài tập 24. Nhận xét rằng $\frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14}, \frac{5\pi}{14}$ là nghiệm của phương trình:

$$7x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Ta sẽ đi xây dựng phương trình đại số nhận $a = \cos^2\frac{\pi}{14}$, $b = \cos^2\frac{3\pi}{14}$, $c = \cos^2\frac{5\pi}{14}$ làm nghiệm bằng cách:

$$(1) \Leftrightarrow \cos7x = 0 \Leftrightarrow \cos(6x + x) = 0 \Leftrightarrow \cos6x.\cos x - \sin6x.\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow (4\cos^3 2x - 3\cos2x)\cos x - 2\sin3x.\cos3x.\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow [4(2\cos^2x - 1)^3 - 3(2\cos^2x - 1)]\cos x -$$

$$- 2(3\sin x - 4\sin^3x).(4\cos^3x - 3\cos x)\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow (64\cos^6x - 112\cos^4x + 56\cos^2x - 7)\cos x = 0$$

$$\Rightarrow 64\cos^6x - 112\cos^4x + 56\cos^2x - 7 = 0.$$

Đặt $t = \cos^2x$ với $0 \le t \le 1$ ta được:

$$64t^3 - 112t^2 + 56t - 7 = 0.$$

Từ đó, theo định lí Viét ta được:

$$\begin{cases} a + b + c = \frac{7}{4} \\ ab + bc + ca = \frac{7}{8}. \\ abc = \frac{7}{64} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2\frac{\pi}{14} + \cos^2\frac{3\pi}{14} + \cos^2\frac{5\pi}{14} = \frac{7}{4} \\ \cos^2\frac{\pi}{14}.\cos^2\frac{3\pi}{14} + \cos^2\frac{3\pi}{14}.\cos^2\frac{5\pi}{14} + \cos^2\frac{5\pi}{14}.\cos^2\frac{\pi}{14} = \frac{7}{8}. \\ \cos^2\frac{\pi}{14}.\cos^2\frac{3\pi}{14}.\cos^2\frac{5\pi}{14} = \frac{7}{64} \end{cases}$$

a. Ta suy ra:

$$A = \cos^4\frac{\pi}{14} + \cos^4\frac{3\pi}{14} + \cos^4\frac{5\pi}{14} = a^2 + b^2 + c^2$$

$$= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = \frac{49}{16} - \frac{7}{4} = \frac{21}{16}.$$

b. Ta suy ra:

$$B = \cos^6\frac{\pi}{14} + \cos^6\frac{3\pi}{14} + \cos^6\frac{5\pi}{14} = a^3 + b^3 + c^3$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc = \frac{35}{32}.$$

Bài tập 25. Nhận xét rằng $\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}$ là nghiệm của phương trình:

$$7x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

Ta sẽ đi xây dựng phương trình đại số nhận $a = \cos\frac{2\pi}{7}$, $b = \cos\frac{4\pi}{7}$, $c = \cos\frac{8\pi}{7}$ làm nghiệm bằng cách:

$(1) \Leftrightarrow 4x = -3x + 2k\pi \Leftrightarrow \cos 4x = \cos(-3x + 2k\pi)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 = \cos 3x \Leftrightarrow 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\Leftrightarrow 8\cos^4 x - 4\cos^3 x - 8\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(8\cos^3 x + 4\cos^2 x - 4\cos x - 1) = 0$

$\Rightarrow 8\cos^3 x + 4\cos^2 x - 4\cos x - 1 = 0.$

Từ đó, theo định lí Viét ta được:

$$\begin{cases} a + b + c = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2} \\ ab + bc + ca = \cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7} = -\frac{1}{2} \\ abc = \cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{8\pi}{7} = \frac{1}{8} \end{cases}.$$

Ta suy ra:

$$A = \sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{\frac{5 - 3\sqrt[3]{7}}{2}}.$$

Chú ý: Để tính được giá trị của A bạn đọc hãy sử dụng hệ ẩn phụ:

$$\begin{cases} A = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} \\ B = \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca} \end{cases}$$

và hằng đẳng thức:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc.$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a).$$

Bài tập 26. Từ giả thiết suy ra:

$$6 = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^4 x + \sin^4 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}$$

$$= \frac{1 + (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x.\cos^2 x}{\frac{1}{4}\sin^2 2x} = \frac{8 - 2\sin^2 2x}{\sin^2 2x}$$

$$\Leftrightarrow 6\sin^2 2x = 8 - 2\sin^2 2x \Leftrightarrow 1 - \sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0.$$

Bài tập 27. Từ giả thiết suy ra:

$$m.n = (\cos a + \cos b)(\sin a + \sin b)$$

$$= (\sin a.\cos b + \sin b.\cos a) + (\sin a.\cos a + \sin b.\cos b)$$

$$= \sin(a + b) + \frac{1}{2}(\sin 2a + \sin 2b) = \sin(a + b) + \sin(a + b).\cos(a - b)$$

$$= [1 + \cos(a - b)]\sin(a + b). \quad (1)$$

Mặt khác, ta có thể biến đổi giả thiết như sau:

$$\begin{cases}(\cos a + \cos b)^2 = m^2 \\ (\sin a + \sin b)^2 = n^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 = (\cos^2 a + \sin^2 a) + 2(\cos a.\cos b + \sin a.\sin b) + (\cos^2 b + \sin^2 b)$$

$$= 2 + 2\cos(a - b)$$

$$\Rightarrow \cos(a - b) = \frac{1}{2}(m^2 + n^2 - 2). \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$m.n = [1 + \frac{1}{2}(m^2 + n^2 - 2)]\sin(a + b) \Leftrightarrow \sin(a + b) = \frac{2mn}{m^2 + n^2}.$$

Bài tập 28. Xét hai trường hợp n chẵn và n lẻ.

Bài tập 29.

a. Ta có:

$$VT = \frac{1}{2}[1 + \cos 2(x - y)] - \frac{1}{2}[1 + \cos 2(x + y)]$$

$$= -\frac{1}{2}[\cos 2(x + y) - \cos 2(x - y)] = \sin 2x.\sin 2y, \text{ đpcm.}$$

b. Ta có:

$$VT = \frac{1}{2}[1 + \cos 2(x - y)] - \frac{1}{2}[1 - \cos 2(x + y)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 2(x + y) + \cos 2(x - y)] = \cos 2x.\cos 2y, \text{ đpcm.}$$

c. Ta có:

$$VP = \frac{1}{2}(1 + \cos2x) + \frac{1}{2}(1 + \cos2y) - \sin^2(x + y)$$

$$= \frac{1}{2}(\cos2x + \cos2y) + 1 - \sin^2(x + y) = \cos(x + y).\cos(x - y) + \cos^2(x + y)$$

$$= [\cos(x + y) + \cos(x - y)]\cos(x + y) = 2\cos x.\cos y.\cos(x + y), \text{ đpcm.}$$

Bài tập 30.

a. Ta có:

$$VT = \sin^2x.(\sin x + \cos x) + \cos^2x.(\cos x + \sin x)$$
$$= (\sin^2x + \cos^2x)(\cos x + \sin x) = \sin x + \cos x, \text{ đpcm.}$$

b. Ta có:

$$VT = \sin3x - 2\sin^3 3x + \frac{1}{2}(\sin3x - \sin x)$$

$$= \frac{3}{2}\sin3x - 2\sin^3 3x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}(3\sin3x - 4\sin^3 3x) - \frac{1}{2}\sin x$$

$$= \frac{1}{2}\sin9x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}(\sin9x - \sin x) = \cos5x.\sin4x, \text{ đpcm.}$$

c. Ta có:

$$VT = \frac{1}{4}(1 - \cos2x)^2 + \frac{1}{4}[1 + \cos(2x + \frac{\pi}{2})]^2 = \frac{1}{4}(1 - \cos2x)^2 + \frac{1}{4}(1 - \sin2x)^2$$

$$= \frac{1}{4}(1 - 2\cos2x + \cos^2 2x + 1 - 2\sin2x + \sin^2 2x)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2}(\sin2x + \cos2x) = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4}), \text{ đpcm.}$$

Bài tập 31.

a. Ta có:

$$VT = \frac{tgx - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}tgx} + tgx + \frac{tgx + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}tgx} = \frac{9tgx - 3tg^3x}{1 - 3tg^2x} = \frac{3(3 - tg^2x)tgx}{1 - 3tg^2x}$$

$$= 3tg3x, \text{ đpcm.}$$

b. Sử dụng kết quả trong câu a), ta có:

$$VT = [tg(x - \frac{\pi}{3}) + tgx + tg(x + \frac{\pi}{3})]^2 -$$

$$- 2[tg(x - \frac{\pi}{3}).tgx + tgx.\,tg(x + \frac{\pi}{3}) + tg(x + \frac{\pi}{3}).tg(x - \frac{\pi}{3})]$$

$$= 9tg^2 3x - 2[tg(x - \frac{\pi}{3}) + tg(x + \frac{\pi}{3})]tgx - 2tg(x + \frac{\pi}{3}).tg(x - \frac{\pi}{3})$$

$$= 9tg^2 3x - 2.\left[\frac{tgx - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}tgx} + \frac{tgx + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}tgx}\right].tgx - 2\frac{tgx - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}tgx}.\frac{tgx + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}tgx}$$

$$= 9tg^2 3x - \frac{16tg^2x}{1 - 3tg^2x} - \frac{2(tg^2x - 3)}{1 - 3tg^2x} = 9tg^2 3x + 6, \text{ đpcm.}$$

c. Ta có:

$$\sin(x + y + z) = \sin(x + y).\cos z + \cos(x + y).\sin z$$

$$= \sin x.\cos y.\cos z + \sin y.\cos x.\cos z + \cos x.\cos y.\sin z - \sin x.\sin y.\sin z$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(x + y + z)}{\cos x.\cos y.\cos z} = tgx + tgy + tgz - tgx.tgy.tgz$$

$$\Leftrightarrow tgx + tgy + tgz = tgx.tgy.tgz + \frac{\sin(x + y + z)}{\cos x.\cos y.\cos z}$$, đpcm.

d. Ta có:

$$\frac{tg^3x}{\sin^2 x} + \frac{cotg^3x}{\cos^2 x} = (1 + cotg^2x)tg^3x + (1 + tg^2x)cotg^3x$$

$$= tg^3x + cotg^3x + tgx + cotgx$$

$$= tg^3x + cotg^3x + \frac{1}{\sin x.\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{tg^3x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x.\cos x} + \frac{cotg^3x}{\cos^2 x} = tg^3x + cotg^3x$$, đpcm.

Bài tập 32. Từ giả thiết:

$$\sin x + \sin y = 2\sin(x + y) \Leftrightarrow 2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2} = 4\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\overset{x+y \neq k\pi,\, k \in Z}{\Leftrightarrow} \cos\frac{x-y}{2} = 2\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}.\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{x}{2}.\sin\frac{y}{2} = 2(\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{y}{2} - \sin\frac{x}{2}.\sin\frac{y}{2})$$

$$\Leftrightarrow 3\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{y}{2} = \cos\frac{x}{2}.\cos\frac{y}{2} \Leftrightarrow tg\frac{x}{2}.tg\frac{y}{2} = \frac{1}{3}$$, đpcm.

Bài tập 33. Tham khảo bài tập 10 câu a) và câu b).

Bài tập 34. Vì $0 \le x \le y \le \frac{\pi}{2}$, suy ra $\sin x \le \sin y$.

Thay $x + y = \frac{\pi}{2}$ vào bất đẳng thức, ta được:

$$x.\sin x + y.\sin y \ge \frac{x+y}{2}.(\sin x + \sin y)$$

$$\Leftrightarrow 2(x.\sin x + y.\sin y) \ge (x + y).(\sin x + \sin y)$$

$\Leftrightarrow (x - y)(\sin x - \sin y) \ge 0$, luôn đúng.

Bài tập 35.

a. Ta có:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \le \sqrt{2} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin x < \frac{\pi}{2} - \cos x. \quad (1)$$

Trong đoạn $[0, \frac{\pi}{2}]$, hàm số cosx nghịch biến, do đó từ (1) ta được:

$$\cos(\sin x) > \cos(\frac{\pi}{2} - \cos x) \Leftrightarrow \cos(\sin x) > \sin(\cos x), \text{ đpcm.}$$

b. Tương tự – *Đề nghị bạn đọc tự làm.*

Bài tập 36. Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$2^{2\sin x} + 2^{tgx} \geq 2\sqrt{2^{2\sin x}.2^{tgx}} = 2\sqrt{2^{2\sin x + tgx}}. \quad (1)$$

Hàm số $f(x) = 2\sin x + tgx - 3x$ trên khoảng $(0, \frac{\pi}{2})$ là hàm đồng biến (*đề nghị bạn đọc chứng minh nhận định này*). Suy ra:

$$f(x) > f(0) \text{ với } 0 < x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\sin x + tgx - 3x > 0 \Leftrightarrow 2\sin x + tgx > 3x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2\sin x + tgx) > \frac{3x}{2} \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}(2\sin x + tgx)} > 2^{\frac{3x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2^{2\sin x + tgx}} > 2^{\frac{3x}{2}} \Leftrightarrow 2\sqrt{2^{2\sin x + tgx}} > 2^{\frac{3x}{2}+1} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ta có:

$$2^{2\sin x} + 2^{tgx} > 2^{\frac{3x}{2}+1}, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 37. Trước tiên ta đi chứng minh:

$$\sin a + \sin a \leq 2\sin\frac{a+b}{2}, \text{ với } 0 \leq a, b \leq \pi.$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với:

$$2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2} \leq 2\sin\frac{a+b}{2} \Leftrightarrow (\cos\frac{a-b}{2} - 1)\sin\frac{a+b}{2} \leq 0.$$

Bất đẳng thức trên đúng bởi:

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{a+b}{2} \leq \pi \Rightarrow \sin\frac{a+b}{2} \geq 0 \\ \cos\frac{a-b}{2} - 1 \leq 0 \end{cases}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} 0 \leq a, b \leq \pi \\ \left[\begin{array}{l} \sin\frac{a+b}{2} = 0 \\ \cos\frac{a-b}{2} = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 0 \\ a = b = \pi \\ a = b \end{array}\right. \Leftrightarrow a = b.$$

Khi đó, vì $0 \le x, y, z, \frac{x+y+z}{3} \le \pi$ sử dụng kết quả trên ta có:

$$\sin x + \sin y + \sin z + \sin\frac{x+y+z}{3} \le 2\sin\frac{x+y}{2} + 2\sin\frac{x+y+4z}{6}$$

$$\le 4\sin\frac{\frac{x+y}{2}+\frac{x+y+4z}{6}}{2} = 4\sin\frac{x+y+z}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \sin y + \sin z \le \sin\frac{x+y+z}{3}, \text{ đpcm.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} z = \frac{x+y+z}{3} \\ x = y \\ \frac{x+y}{2} = \frac{x+y+4z}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

Bài tập 38. Từ giả thiết ta nhận được:

$$0 < x + y < \frac{\pi}{2} - z < \frac{\pi}{2} \Rightarrow tg(x+y) < tg(\frac{\pi}{2} - z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{tgx + tgy}{1 - tgx.tgy} < \frac{1}{tgz} \underset{1-tgx.tgy>0 \text{ và } tgz>0}{\overset{0<x,y,z,x+y<\frac{\pi}{2}}{\Leftrightarrow}} (tgx + tgy)tgz < 1 - tgx.tgy$$

$$\Leftrightarrow tgx.tgy + tgy.tgz + tgz.tgx < 1, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 39. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 40. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 41. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 42.

a. Ta có kết luận:

- $y_{Max} = 0$ đạt được khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $y_{Min} = -2$ đạt được khi $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. Ta có kết luận:

- $y_{Max} = 5$ đạt được khi $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = 2k\pi \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $y_{Min} = -1$ đạt được khi $\cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 43.

a. Ta có kết luận:

- $y_{Max} = 5$ đạt được khi $x = \frac{7\pi}{6}$.
- $y_{Min} = 2$ đạt được khi $x = \frac{\pi}{2}$.

b. Ta có kết luận:

- $y_{Max} = 1$ đạt được khi $x = \frac{\pi}{6}$.
- $y_{Min} = -5$ đạt được khi $x = \frac{\pi}{2}$.

Bài tập 44. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau:

a. Ta có $|\sin x| \le 1$, do đó:

$$y = 3\sqrt{1+\sin x} - 1 \le 3\sqrt{1+1} - 1 = 3\sqrt{2} - 1$$

$$\Rightarrow y_{Max} = 3\sqrt{2} - 1, \text{ đạt được khi } \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$y = 3\sqrt{1+\sin x} - 1 \ge 3\sqrt{1-1} - 1 = -1$$

$$\Rightarrow y_{Min} = -1, \text{ đạt được khi } \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = 2 + 2\sin x + 1 - \sin^2 x \Leftrightarrow y = 3 + 2\sin x - \sin^2 x.$$

Đặt $t = \sin x$, điều kiện $|t| \le 1$, ta được:

$$y = 3 + 2t - t^2.$$

Hoành độ đỉnh của Parabol $t_0 = 1 \in [-1, 1]$.

Ta có kết luận:

- $y_{Max} = y(t_0) = y(1) = 4$ đạt được khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $y_{Min} = y(-1) = 0$ đạt được khi $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = (\sin x + 1)^2 + 4.$$

Vì $|\sin x| \le 1$ nên:

$y \le (1 + 1)^2 + 4 = 8 \Rightarrow y_{Max} = 8$, đạt được khi:

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$y \ge 4 \Rightarrow y_{Min} = 4$, đạt được khi:

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

d. Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = \sin x - (1-\sin^2 x) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \sin^2 x + \sin x - \frac{1}{2} = (\sin x + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4}$$

Vì $|\sin x| \le 1$ nên:

$y \le (1 + \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow y_{Max} = \frac{3}{2}$, đạt được khi:

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$y \geq -\dfrac{3}{4} \Rightarrow y_{Min} = -\dfrac{3}{4}$, đạt được khi:

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ hoặc } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Bài tập 45.

a. Biến đổi hàm số về dạng:

$$y = 2\sin 2x - \cos 2x + 1 + \sqrt{5}. \quad (1)$$

Nhận xét rằng $|2\sin 2x - \cos 2x| \leq \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$, từ đó suy ra:

$$-\sqrt{5} + 1 + \sqrt{5} \leq 2\sin 2x - \cos 2x + 1 + \sqrt{5} \leq \sqrt{5} + 1 + \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq y \leq 1 + 2\sqrt{5}.$$

Ta có kết luận:

- $y_{min} = 1$ đạt được khi:

$$2\sin 2x - \cos 2x = -\sqrt{5} \Leftrightarrow x = \alpha - \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}, \text{ với } \cos 2\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

- $y_{max} = 1 + 2\sqrt{5}$ – Bạn đọc tự làm tiếp.

b. Biến đổi hàm số về dạng:

$$y = a\cos^4 x + b(1 - \cos^2 x)^2 = (a + b)\cos^4 x - 2b\cos^2 x + b$$

Đặt $t = \cos^2 x$, điều kiện $0 \leq t \leq 1$, ta được:

$$y = (a + b)t^2 - 2bt + b.$$

Hoành độ đỉnh của Parabol $t_0 = \dfrac{b}{a + b} \in [0, 1]$.

Ta có kết luận:

- $y_{Min} = y(t_0) = y\left(\dfrac{b}{a + b}\right) = \dfrac{ab}{a + b}$ đạt được khi

$$\cos^2 x = \frac{b}{a + b} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{b - a}{a + b}.$$

- $y_{Max} = \max\{y(0), y(1)\} = b$ đạt được khi

$$\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Bài tập 46. Biến đổi hàm số về dạng:

$$y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2x) + \frac{b}{2}\sin 2x + \frac{c}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$= \frac{b}{2}\sin 2x + \frac{c - a}{2}\cos 2x + \frac{a + b}{2}$$

Ta biết rằng $|A.\sin\alpha + B.\cos\alpha| \leq \sqrt{A^2 + B^2}$, do đó:

$$\frac{a + b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c - a}{2}\right)^2} \leq y \leq \frac{a + b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c - a}{2}\right)^2}$$

Ta có kết luận:

- $y_{max} = \dfrac{a+b}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{c-a}{2}\right)^2}$.
- $y_{min} = \dfrac{a+b}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{c-a}{2}\right)^2}$.

Bài tập 47.

a. Hàm số xác định với mọi x.

Ta đi tìm điều kiện của y để phương trình

$\dfrac{3\sin x}{2+\cos x} = y$ có nghiệm đối với ẩn x.

Phương trình được chuyển về dạng:

$3\sin x - y\cos x = 2y$ (1)

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$3^2 + (-y)^2 \geq (2y)^2 \Leftrightarrow y^2 \leq 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$.

Ta có kết luận:

- $y_{max} = \sqrt{3}$ đạt được khi

$3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{6}\sin x - \sin\dfrac{\pi}{6}.\cos x = 1$

$\Leftrightarrow \sin(x - \dfrac{\pi}{6}) = 1 \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- $y_{min} = -\sqrt{3}$ đạt được khi

$3\sin x - \sqrt{3}\cos x = -2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x - \cos x = -2$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{6}\sin x - \sin\dfrac{\pi}{6}.\cos x = -1$

$\Leftrightarrow \sin(x - \dfrac{\pi}{6}) = -1 \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. Ta đi tìm y để phương trình:

$y = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$ có nghiệm đối với ẩn x.

Phương trình được chuyển về dạng:

$\sin x - y\cos x = 2y$. (1)

Phương trình (1) có nghiệm khi:

$1^2 + y^2 \geq 4y^2 \Leftrightarrow 3y^2 \leq 1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq y \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Mặt khác vì $x \in [0, \pi]$ nên $y \geq 0$, do đó điều kiện thu được là $0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ta có kết luận:

- $y_{max} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ đạt được khi:

$$\sin x - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos x = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{6}) = 1 \overset{x \in [0, \pi]}{\Leftrightarrow} x = \frac{2\pi}{3}.$$

- $y_{min} = 0$ đạt được khi:

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pi$.

c. Ta đi tìm y để phương trình:

$y = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ có nghiệm đối với ẩn x.

Phương trình được chuyển về dạng:

$y\sin x - \cos x = -2y.$ (1)

Phương trình (1) có nghiệm khi:

$$y^2 + 1^2 \geq 4y^2 \Leftrightarrow 3y^2 \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Mặt khác vì $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ nên $y \geq 0$, do đó điều kiện thu được là $0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ta có kết luận:

- $y_{max} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ đạt được khi:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x - \cos x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin x - \sqrt{3}\cos x = -2$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{3}) = -1 \overset{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}{\Leftrightarrow} x = -\frac{\pi}{6}.$$

- $y_{min} = 0$ đạt được khi:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{2}.$$

d. Hàm số xác định với mọi x.

Ta đi tìm y để phương trình:

$y = 1 + \frac{3\sin x}{2 + \cos x}$ có nghiệm đối với ẩn x.

Phương trình được chuyển về dạng:

$3\sin x + (1 - y)\cos x = 2(y - 1).$ (1)

Phương trình (1) có nghiệm khi:

$$3^2 + (1 - y)^2 \geq 4(y - 1)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 6y - 6 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} \leq y \leq 1 + \sqrt{3}.$$

Ta có kết luận:

- $y_{max} = 1 + \sqrt{3}$ đạt được khi

$$3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

- $y_{min} = 1 - \sqrt{3}$ đạt được khi

$$3\sin x + \sqrt{3}\cos x = -2\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

e. Đặt $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, vì $-\pi < x < \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ do đó t nhận giá trị trên toàn R, thì:

$$y = \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3}{\frac{2(1-t^2)}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} + 4} = \frac{t^2+2t+2}{t^2-t+3}.$$

Để tìm miền giá trị của hàm số ta đi tìm điều kiện của y để phương trình

$\frac{t^2+2t+2}{t^2-t+3} = y$ có nghiệm đối với ẩn t.

$\Leftrightarrow (y-1)t^2 - (y+2)t + 3y - 2 = 0$ có nghiệm đối với ẩn t. (1)

Trường hợp 1: $y = 1$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow -3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Trường hợp 2: $y \neq 1$.

Phương trình (1) có nghiệm khi:

$$\begin{cases} y \neq 1 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 1 \\ (y+2)^2 - 4(y-1)(3y-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 0 \\ \frac{2}{11} \leq y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{11} \leq y \leq 2.$$

Ta có kết luận:

- $y_{max} = 2$ đạt được khi:

$$t = \frac{y+2}{2(y-1)} = 4 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 4 = \operatorname{tg}\alpha \Leftrightarrow x = 2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

- $y_{min} = \frac{2}{11}$ đạt được khi:

$$t = \frac{y+2}{2(y-1)} = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\frac{8}{3} = \operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow x = 2\beta + 2k\pi. \in \mathbb{Z}$$

Bài tập 48. Đặt $t = \sin\frac{2x}{1+x^2}$, ta có $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$ và $[-1, 1] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Do đó:

$$\sin(-1) \leq \sin\frac{2x}{1+x^2} \leq \sin 1 \Leftrightarrow -\sin 1 \leq t \leq \sin 1.$$

Khi đó

$$y = -2t^2 + t + 2 = -2(t - \frac{1}{4})^2 + \frac{17}{8}.$$

Ta có kết luận:

1. $\text{Min}y = \min\{f(-\sin 1), f(\sin 1)\} = -2\sin^2 1 - \sin 1 + 2$, đạt được khi:

$$\left[\begin{array}{l} t = -\sin 1 \\ t = \sin 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

2. $\text{Max}y = f(\frac{1}{4}) = \frac{17}{8}$, đạt được khi

$$t = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin\frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{4}.$$

Bài tập 49. Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \ge 0 \\ \sin x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} \sqrt{\cos x} \ge \cos^2 x \\ \sqrt{\sin x} \ge \sin^2 x \end{cases} \Rightarrow y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} \ge \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

suy ra $\text{Min}y = 1$, đạt được khi:

$$\begin{cases} \sqrt{\cos x} = \cos^2 x \\ \sqrt{\sin x} = \sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow x = 2k\pi \text{ hoặc } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacôxki ta có:

$$(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x})^2 \le (1+1)(\sin x + \cos x) = 2\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \le 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} \le \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{8}$$

suy ra $\text{Max}y = \sqrt[4]{8}$, đạt được khi:

$$\begin{cases} \sqrt{\cos x} = \sqrt{\sin x} \\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Bài tập 50. Điều kiện:

$$\begin{cases} 1 + 2\cos x \ge 0 \\ 1 + 2\sin x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacôxki ta có:

$$y^2 = (\sqrt{1+2\cos x} + \sqrt{1+2\sin x})^2 \le (1+1)[2 + 2(\sin x + \cos x)]$$

$$= 4 + 4\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \le 4 + 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{1+2\cos x} + \sqrt{1+2\sin x} \le 2\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

suy ra $\text{Max}y = 2\sqrt{1+\sqrt{2}}$, đạt được khi:

$$\begin{cases}\sqrt{1+2\cos x} = \sqrt{1+2\sin x}\\ \sin(x+\frac{\pi}{4}) = 1\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Bài tập 51.

a. Ta đưa hàm số về dạng:

$$y = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^5 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}(1 + 10\cos^2 2x + 5\cos^4 2x)$$

$$= \frac{1}{16}[5(\cos^2 2x + 1)^2 - 4].$$

Từ trên, ta có:

- $y \le \frac{1}{16}[5(1+1)^2 - 4] = 1,$

  suy ra $y_{Max} = 1$ đạt được khi $\cos^2 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

- $y \ge \frac{1}{16}[5(0+1)^2 - 4] = \frac{1}{16},$

  suy ra $y_{Min} = \frac{1}{16}$ đạt được khi $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

b. Biến đổi hàm số về dạng:

$$y = 2(1 + \sin 2x.\cos 4x) - \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1 - 2\cos^2 4x + 1)$$

$$= \cos^2 4x + 2\sin 2x.\cos 4x + \sin^2 2x + 1 = (\cos 4x + \sin 2x)^2 + 1$$

$$= (2\sin^2 2x - \sin 2x - 1)^2 + 1.$$

Ta có kết luận:

- $y_{Min} = 1$, đạt được khi:

$$2\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 1\\ \sin 2x = -\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\\ 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\\ 2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + k\pi\\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi\\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

- $y_{Max} = 4 + 1 = 5$, đạt được khi:

$$\sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Bài tập 52. Với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì sinx, cosx > 0 do đó:

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \ge 2.\frac{1}{\sin x}.\frac{1}{\cos x} = \frac{4}{\sin 2x} \ge 4.$$

Từ đó, suy ra:

$$\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + 2.\frac{1}{\sin x}.\frac{1}{\cos x} \ge 4 + 2.2 = 8$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \ge 2\sqrt{2},$$

Ta có kết luận:

- $y_{Min} = 2\sqrt{2}$ đạt được khi $\sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

Bài tập 53. Hàm số xác định với mọi x.

Ta đi tìm y để phương trình $\frac{2k\cos x + k + 1}{\cos x + \sin x + 2} = y$ có nghiệm đối với ẩn x.

$$\Leftrightarrow y\sin x + (y - 2k)\cos x = k + 1 - 2y. \quad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow y^2 + (y - 2k)^2 \ge (k + 1 - 2y)^2 \Leftrightarrow 2y^2 - 4y - 3k^2 + 2k + 1 \le 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sqrt{6k^2 - 4k + 2} \le y \le 1 + \frac{1}{2}\sqrt{6k^2 - 4k + 2}.$$

Ta có kết luận:

$$y_{max} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{6k^2 - 4k + 2} \text{ và } y_{min} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{6k^2 - 4k + 2}.$$

a. Với k = 1, thì:

- $y_{max} = 2$ đạt được khi:

$$2\sin x = -2 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

- $y_{min} = 0$ đạt được khi:

$$-2\cos x = 2 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b. Giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow 6k^2 - 4k + 2 \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow k = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Vậy, với $k = \frac{1}{3}$ thì giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 54. Hàm số xác định với mọi x.

Ta đi tìm y để phương trình $\frac{k\sin x + 1}{\cos x + 2} = y$ có nghiệm đối với ẩn x.

$$\Leftrightarrow k\sin x - y\cos x = 2y - 1. \quad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow k^2 + y^2 \geq (2y-1)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y - k^2 + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{3k^2-1}}{3} \leq y \leq \frac{2+\sqrt{3k^2-1}}{3} \text{ với } |k| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Từ đó suy ra $y_{min} = \frac{2-\sqrt{3k^2-1}}{3}$.

Để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn −1 điều kiện là:

$$\frac{2-\sqrt{3k^2-1}}{3} < -1 \Leftrightarrow \sqrt{3k^2-1} > 5 \Leftrightarrow k^2 > \frac{26}{3} \Leftrightarrow |k| \geq \sqrt{\frac{26}{3}}.$$

Vậy, với $|k| \geq \sqrt{\frac{26}{3}}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 55. Tham khảo bài tập 52.

Bài tập 56. Đánh giá thông qua y^2.

CHỦ ĐỀ 4
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho ΔABC, với các góc A, B, C, tương ứng:

- Các cạnh là a, b, c.
- Các đường trung tuyến m_a, m_b, m_c.
- Các đường cao h_a, h_b, h_c.
- Các đường phân giác l_a, l_b, l_c.

Ta có các hệ thức sau:

1. ĐỊNH LÝ HÀM SỐ COSIN

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$.
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

2. ĐỊNH LÝ HÀM SỐ SIN

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

3. ĐỊNH LÝ ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN

- $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$,
- $c^2 + a^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}$,
- $a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$.

4. ĐỊNH LÝ ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

Phân giác trong

- $l_A = \dfrac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}$,
- $l_B = \dfrac{2ac.\cos\frac{B}{2}}{a+c}$,
- $l_C = \dfrac{2ab.\cos\frac{C}{2}}{a+b}$.

Phân giác ngoài

- $l'_A = \dfrac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{|b-c|}$,
- $l'_B = \dfrac{2ac.\cos\frac{B}{2}}{|a-c|}$,
- $l'_C = \dfrac{2ab.\cos\frac{C}{2}}{|a-b|}$.

5. ĐỊNH LÝ HÌNH CHIẾU

- $a = b.\cos C + c.\cos B$.
- $b = c.\cos A + a.\cos C$.
- $c = a.\cos B + b.\cos A$.

6. CÔNG THỨC VỀ DIỆN TÍCH

- $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$.
- $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$
- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = pr = p(p-a)\text{tg}\frac{A}{2} = p(p-b)\text{tg}\frac{B}{2} = p(p-c)\text{tg}\frac{C}{2}$

  với p là nửa chu vi, r là bán kính đường tròn nội tiếp.
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

7. CÔNG THỨC BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C},$$

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

8. CÔNG THỨC BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

$$r = \frac{S}{p},$$

$$r = (p-a)\,\text{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\,\text{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\,\text{tg}\frac{C}{2}.$$

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN VÀ BÀITẬP

Bài toán 1: Chứng minh đẳng thức lượng giác trong tam giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Muốn chứng minh một đẳng thức lượng giác trong tam giác ngoài việc vận dụng thành thạo các phép biến đổi lượng giác chúng ta còn cần phải nhớ các hệ thức cơ bản cho ΔABC bao gồm:

1. Định lý hàm số cosin

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B.$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

2. Định lý hàm số sin

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

3. Định lý hình chiếu

$a = b.\cos C + c.\cos B.$
$b = c.\cos A + a.\cos C.$
$c = a.\cos B + b.\cos A.$

Trong bài toán này ta thường chia thành ba dạng nhỏ, bao gồm:

Dạng 1: Chứng minh hệ thức lượng giác liên hệ giữa các góc.
Với dạng toán này chúng ta cần đặc biệt lưu ý tới:

- $A + B + C = \pi \Rightarrow A + B = \pi - C$ và $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ do đó:

$$\sin(A + B) = \sin(\pi - C) = \sin C,$$
$$\sin\frac{A+B}{2} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}) = \cos\frac{C}{2}, ...$$

- Với các đẳng thức lượng giác chứa một hàm số lượng giác của ba góc (sin hoặc cos) ta thường chỉ biến đổi hai nhân tử còn nhân tử thứ ba sẽ được xác định qua một vài phép biến đổi sau đó, và thường không sử dụng phép biến đổi tích thành tổng hoặc tổng thành tích khi có mặt cả ba góc A, B, C.
- Với các đẳng thức lượng giác chứa một hàm số lượng giác của ba góc (tg hoặc cotg) ta thường sử dụng phép biến đổi tương đương để đưa đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức luôn đúng hoặc ngược lại (xuất phát từ một đẳng thức luôn đúng).

Dạng 2: Chứng minh hệ thức lượng giác liên hệ giữa góc và cạnh.
Với dạng toán này chúng ta thường sử dụng định lý hàm số sin và định lý hàm số cos.

Dạng 3: Chứng minh hệ thức lượng giác liên hệ tới nhiều yếu tố trong tam giác.
Với dạng toán này chúng ta cần nhớ lại các kết quả của:

- Định lý đường trung tuyến, ví dụ:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}.$$

- Định lý đường phân giác, ví dụ:

$$l_A = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$

- Định lý về diện tích tam giác, ví dụ:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{abc}{4R} = pr = p(p-a)\text{tg}\frac{A}{2}$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- Các công thức tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{abc}{4S} \text{ và } r = \frac{S}{p} = (p-a)\,tg\frac{A}{2}.$$

Chú ý: Có một phương pháp để chứng minh các đẳng thức lượng giác mà trong nhiều trường hợp tỏ ra rất hiệu quả là *phương pháp hình học*.

CÁC ĐẲNG THỨC CƠ BẢN TRONG TAM GIÁC

Trong ΔABC ta luôn có:

Đẳng thức 1. $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$.

Đẳng thức 2. $\cos A + \cos B + \cos C = 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} + 1$.

Đẳng thức 3. $tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC$ với ΔABC không vông.

Đẳng thức 4. $cotgA.cotgB + cotgB.cotgC + cotgC.cotgA = 1$.

Đẳng thức 5. $tg\frac{A}{2}\,tg\frac{B}{2} + tg\frac{B}{2}.tg\frac{C}{2} + tg\frac{C}{2}.tg\frac{A}{2} = 1$.

Đẳng thức 6. $cotg\frac{A}{2} + cotg\frac{B}{2} + cotg\frac{C}{2} = cotg\frac{A}{2}.cotg\frac{B}{2}.cotg\frac{C}{2}$.

1. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC 1

Ta có:

$$VT = \sin A + \sin B + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + \sin C$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2} = 2(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2})\cos\frac{C}{2}$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.$$

2. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC 2

Ta có:

$$VT = \cos A + \cos B + \cos C = (\cos A + \cos B) + \cos C$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + \cos C = 2\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}).\cos\frac{A-B}{2} + \cos C$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + (1 - 2\sin^2\frac{C}{2}) = 1 - 2\sin\frac{C}{2}(\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2})$$

$$= 1 - 2\sin\frac{C}{2}[\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}) - \cos\frac{A-B}{2}]$$

$$= 1 - 2\sin\frac{C}{2}(\cos\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}) = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.$$

3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC 3

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$A + B + C = \pi \Leftrightarrow A + B = \pi - C \Rightarrow tg(A + B) = tg(\pi - C)$$

$$\Leftrightarrow \frac{tgA + tgB}{1 - tgA.tgB} = -tgC \Leftrightarrow tgA + tgB = (1 - tgA.tgB)tgC$$

$$\Leftrightarrow tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC.$$

Cách 2: Sử dụng đẳng thức 4:

$$cotgA.cotgB + cotgB.cotgC + cotgC.cotgA = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{tgA.tgB} + \frac{1}{tgB.tgC} + \frac{1}{tgC.tgA} = 1$$

$$\Leftrightarrow tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC.$$

4. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC 4

Sử dụng đẳng thức 3, ta có:

$$tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cot gA} + \frac{1}{\cot gB} + \frac{1}{\cot gC} = \frac{1}{\cot gA.\cot gB.\cot gC}$$

$$\Leftrightarrow cotgA.cotgB + cotgB.cotgC + cotgC.cotgA = 1.$$

5. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC 5

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \Leftrightarrow tg(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}) = tg(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2}}{1 - tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2}} = cotg\frac{C}{2} = \frac{1}{tg\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2} + tg\frac{B}{2}.tg\frac{C}{2} + tg\frac{C}{2}.tg\frac{A}{2} = 1.$$

Cách 2: Sử dụng đẳng thức 6 – *Bạn đọc tự làm*.

6. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC 6

Ta có:

$$tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2} + tg\frac{B}{2}.tg\frac{C}{2} + tg\frac{C}{2}.tg\frac{A}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cot g\frac{A}{2}.\cot g\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cot g\frac{B}{2}.\cot g\frac{C}{2}} + \frac{1}{\cot g\frac{C}{2}.\cot g\frac{A}{2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow cotg\frac{A}{2} + cotg\frac{B}{2} + cotg\frac{C}{2} = cotg\frac{A}{2}.cotg\frac{B}{2}.cotg\frac{C}{2}.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A.\sin B.\sin C$.

b. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A.\cos B.\cos C$.

Bài tập 2: Cho ΔABC với n nguyên dương, chứng minh rằng:

a. $\sin(2nA) + \sin(2nB) + \sin(2nC) = 4(-1)^{n+1}\sin(nA).\sin(nB).\sin(nC)$.

b. $\cos(2nA) + \cos(2nB) + \cos(2nC) = 4(-1)^{n+1}\cos(nA).\cos(nB).\cos(nC) - 1$.

c. $\cos^2 nA + \cos^2 nB + \cos^2 nC = 2(-1)^n\cos(nA).\cos(nB).\cos(nC) + 1$.

d. $tg(nA) + tg(nB) + tg(nC) = tg(nA).tg(nB).tg(nC)$.

e. $cotg(nA).cotg(nB) + cotg(nB).cotg(nC) + cotg(nC).cotg(nA) = 1$.

Bài tập 3: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $\frac{b+c}{a}.\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B-C}{2}$.

b. $\frac{2(b+c)}{a}.\sin^2\frac{A}{2} = \cos B + \cos C$.

c. $(a^2 - b^2)\sin A.\sin B = ab.\sin(A - B).\sin C$.

d. $\frac{a.\sin A + b.\sin B + c.\sin C}{a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C} = cotgA + cotgB + cotgC$.

Bài tập 4: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $p(p - a) = 4bc.\cos^2\frac{A}{2}$.

b. $(p - b)(p - c) = bc.\sin^2\frac{A}{2}$.

Bài tập 5: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $a.\sin(B - C) + b.\sin(C - A) + c.\sin(A - B) = 0$.

b. $(b^2 - c^2)cotgA + (c^2 - a^2)cotgB + (a^2 - b^2)cotgC = 0$.

Bài tập 6: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $S = \frac{R}{2}(a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C)$.

b. $S = \frac{1}{4}(a^2.cotgA + b^2.cotgB + c^2.cotgC)$.

c. $S = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4(cotgA + cotgB + cotgC)}$.

d. $S = (p - a)(p - b).cotg\frac{C}{2}$.

Bài tập 7: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $l_a = \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$.

b. $(b + c)^2.l_a^2 = bc[(b + c)^2 - a^2]$.

c. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).l_c + \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).l_a + \left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right).l_b = 2(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2})$.

Bài tập 8: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 4R\sin A\sin B\sin C$.

b. $b^2\sin 2C + c^2\sin 2B = 2bc\sin(B + C)$.

Bài tập 9: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $\cot gA + \cot gB + \cot gC = \dfrac{(a^2 + b^2 + c^2)R}{abc}$.

b. $(a - b)\cot g\dfrac{C}{2} + (b - c)\cot g\dfrac{A}{2} + (a - c)\cot g\dfrac{B}{2} = 0$.

Bài tập 10: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $p = 4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

b. $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

c. $\dfrac{r}{p} = tg\dfrac{A}{2}tg\dfrac{B}{2}tg\dfrac{C}{2}$.

d. $r = \dfrac{a.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}}$.

Bài tập 11: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $1 + \dfrac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$

b. $c^2 = (a - b)^2 + 4S.\dfrac{1 - \cos C}{\sin C}$

Bài tập 12: Cho ΔABC. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$.

b. $S = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$.

Bài tập 13: Cho ΔABC có trung tuyến $AM = \dfrac{c}{2}$. Chứng minh rằng:

a. $a^2 - c^2 = 2b^2$

b. $\sin^2 A = 2\sin^2 B + \sin^2 C$

Bài tập 14: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. Nếu $a + c = 2b$ thì $tg\dfrac{A}{2}tg\dfrac{B}{2}tg\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{3}$

b. Nếu $a + c = 2b$ thì $2(c - a) = 3r(tg\dfrac{C}{2} - tg\dfrac{A}{2})$

c. Nếu $a^2 + c^2 = 2b^2$ thì $2\cot gB = \cot gC + \cot gA$

Bài tập 15: Cho ΔABC, có các cạnh thoả mãn $a^4 = b^4 + c^4$. Chứng minh rằng ΔABC nhọn và các góc thoả mãn $2\sin^2 A = tgB.tgC$.

Bài tập 16: Đường tròn nội tiếp ΔABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại các điểm A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{pr^2}{2R}.$$

Bài tập 17: Cho ΔABC nhọn có các đường cao AA', BB', CC' và 3 cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

a. Chứng minh rằng chu vi $\Delta A'B'C'$ bằng $a\cos A + b\cos B + c\cos C$.

b. Chứng minh rằng $R_{A'B'C'} = \dfrac{1}{2}R_{ABC}$.

Bài toán 2: Chứng minh bất đẳng thức lượng giác trong tam giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Để chứng minh một bất đẳng thức lượng giác trong tam giác, ta có thể lựa chọn theo thứ tự các phương pháp sau:

Phương pháp 1: Dùng phép biến đổi tương đương.

Phương pháp 2: Dùng các bất đẳng thức cơ bản đã có sẵn, như:

1. Bất đẳng thức Côsi:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \quad \text{với } a_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

2. Bất đẳng thức Bunhiacốpski:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

Phương pháp 3: Dùng tam thức bậc hai.

Chú ý: Khi chứng minh một bất đẳng thức lượng giác trong tam giác cần chú ý tới các tính chất đặc trưng của các hàm lượng giác, như:

1. Tính bị chặn của hàm sinx, cosx.
2. Dấu các hàm lượng giác trong các cung phần tư.
3. Tính chất của các cung liên kết: cung đối, cung bù, cung phụ, cung sai khác π.
4. Tính chất: $|b - c| < a < b + c$ trong ΔABC.

CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN TRONG TAM GIÁC

Trong ΔABC ta luôn có:

Bất đẳng thức 1. $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Bất đẳng thức 2. $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

Bất đẳng thức 3. $1 < \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$.

Bất đẳng thức 4. $2 < \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Bất đẳng thức 5. $\sin A.\sin B.\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Bất đẳng thức 6. $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

Bất đẳng thức 7. $\cos A.\cos B.\cos C \leq \frac{1}{8}$.

Bất đẳng thức 8. $\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Bất đẳng thức 9. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$.

Bất đẳng thức 10. $\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C \geq 3\sqrt{3}$, với ΔABC nhọn.

Bất đẳng thức 11. $\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$.

Bất đẳng thức 12. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{B}{2}.\operatorname{tg}\frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Bất đẳng thức 13. $\operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}C \geq \sqrt{3}$, với ΔABC nhọn.

Bất đẳng thức 14. $\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$.

1. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC 1

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Sử dụng phép biến đổi:

$$\sin A + \sin B + \sin C + \sin\frac{\pi}{3} = 2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin(\frac{C}{2} + \frac{\pi}{6}).\cos(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{6})$$

$$\overset{0<\frac{A+B}{2},\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}<\pi}{\leq} 2\sin\frac{A+B}{2} + 2\sin(\frac{C}{2} + \frac{\pi}{6}) = 2[\sin\frac{A+B}{2} + \sin(\frac{C}{2} + \frac{\pi}{6})]$$

$$= 4\sin(\frac{A+B+C}{4} + \frac{\pi}{12}).\cos(\frac{A+B-C}{4} - \frac{\pi}{12})$$

$$= 4\sin\frac{\pi}{3}.\cos(\frac{A+B-C}{4} - \frac{\pi}{12}) \leq 4\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C \leq 3\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \cos\frac{A-B}{2} = 1 \\ \cos(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{6}) = 1 \\ \cos(\frac{A+B-C}{4} - \frac{\pi}{12}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ cùng phép biến đổi:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin A + \sin B + \sin[\pi - (A+B)] = \sin A + \sin B + \sin(A+B)$$

$$= \sin A + \sin B + \sin A.\cos B + \sin B.\cos A$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right) + \sqrt{3}\left(\frac{\sin A}{\sqrt{3}}.\cos B + \frac{\sin B}{\sqrt{3}}.\cos A\right)$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\frac{3}{4} + \sin^2 A\right) + \left(\frac{3}{4} + \sin^2 B\right)\right] +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\frac{\sin^2 A}{3} + \cos^2 B\right) + \left(\frac{\sin^2 B}{3} + \cos^2 A\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin^2 A + \cos^2 A) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin^2 B + \cos^2 B) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \sin A = \sin B = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sin A}{\sqrt{3}} = \cos B \\ \dfrac{\sin B}{\sqrt{3}} = \cos A \end{cases} \Leftrightarrow A = B = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

2. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC 2

Ta lần lượt thực hiện:

a. Chứng minh vế trái, ta có:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + \cos C$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} = 1 + 2(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}).\sin\frac{C}{2}$$

$$= 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} > 1.$$

Nhận xét: Nếu cho $A \to 0$, thì:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \to 1$$

do vậy không thể thay số 1 bởi số lớn hơn trong bất đẳng thức trên.

b. Chứng minh vế phải, ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Sử dụng kết quả $xy \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, ta nhận được:

$$VT = \cos A + \cos B - \cos(A + B) = (\cos A + \cos B).1 - \cos A.\cos B + \sin A.\sin B$$

$$\le \frac{1}{2}[(\cos A + \cos B)^2 + 1] - \cos A.\cos B + \frac{1}{2}(\sin^2 A + \sin^2 B) = \frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \cos A + \cos B = 1 \\ \sin A = \sin B \end{cases} \Leftrightarrow A = B = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Cách 2: Sử dụng $a.\sin x + b.\cos x \le \sqrt{a^2 + b^2}$, ta có:

$$VT = \cos A + \cos B - \cos(A + E) = \cos A + \cos B - \cos A.\cos B + \sin A.\sin B$$

$$= [(1 - \cos B)\cos A + \sin B.\sin A] + \cos B$$

$$\le \sqrt{(1-\cos B)^2 + \sin^2 B} + \cos B = \sqrt{2 - 2\cos B} + \cos B$$

$$= 2\sin\frac{B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{B}{2} = \frac{3}{2} - 2(\frac{1}{2} - \sin\frac{B}{2})^2 \le \frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}(1-\cos B)\cos A+\sin B.\sin A=2\sin\dfrac{B}{2}\\ \sin\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=\dfrac{\pi}{3}\\ \dfrac{1}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A=2.\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}B=\dfrac{\pi}{3}\\ A=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow A=B=C=\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Cách 3: Sử dụng phép biến đổi bằng đánh giá không mất tính tổng quát, ta giả sử C là góc nhỏ nhất trong ΔABC, suy ra $0 < C < \dfrac{\pi}{3}$, khi đó:

$$\cos A+\cos B+\cos C+\cos\frac{\pi}{3}=2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}+2\cos(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6}).\cos(\frac{C}{2}-\frac{\pi}{6})$$

$$\le 2\cos\frac{A+B}{2}+2\cos(\frac{C}{2}+\frac{\pi}{6})$$

$$=4\cos(\frac{A+B+C}{4}+\frac{\pi}{12}).\cos(\frac{A+B-C}{4}-\frac{\pi}{12})$$

$$=4\cos\frac{\pi}{3}.\cos(\frac{A+B-C}{4}-\frac{\pi}{12})\le 4\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C\le 3\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\cos\dfrac{A-B}{2}=1\\ \cos(\dfrac{C}{2}-\dfrac{\pi}{6})=1\\ \cos(\dfrac{A+B-C}{4}-\dfrac{\pi}{12})=1\end{cases}\Leftrightarrow A=B=C\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Cách 4: Sử dụng phép vectơ bằng việc lấy ba vectơ đơn vị $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ trên ba cạnh AB, BC, CA của ΔABC, ta có:

$$(\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3})^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 1+1+1+2(\vec{e_1}.\vec{e_2}+\vec{e_2}.\vec{e_3}+\vec{e_3}.\vec{e_1})\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3+2(-\cos B-\cos C-\cos A)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đồng dạng với tam giác có các cạnh là các vectơ đơn vị $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

3. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC 3

Ta lần lượt thực hiện:

a. Chứng minh vế trái, ta có:

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \overset{0<\cos\frac{A}{2},\cos\frac{B}{2}<1}{\geq} \sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}.\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{C}{2}$$

$$= \sin\frac{A+B}{2} + \sin\frac{C}{2} = \cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}$$

$$= \sqrt{2}\sin(\frac{C}{2} + \frac{\pi}{4}) \overset{\frac{\pi}{4}<\frac{C}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}}{>} \sqrt{2}.\sin\frac{\pi}{4} = 1.$$

b. Chứng minh vế phải, bằng việc sử dụng kết quả $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, ta nhận được:

$$VT = \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}$$

$$= (\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2}).1 + \cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}$$

$$\leq \frac{1}{2}[(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2})^2 + 1] + \frac{1}{2}(\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2}) - \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2} = \frac{3}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} = 1 \\ \cos\frac{A}{2} = \cos\frac{B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow A = B = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

4. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC 4

Ta lần lượt thực hiện:

a. Chứng minh vế trái, ta có $0 < \cos\frac{A}{2}, \cos\frac{B}{2}, \cos\frac{C}{2} < 1$ nên:

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} > \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \cos A + 1 + \cos B + 1 + \cos C) = \frac{1}{2}(3 + \cos A + \cos B + \cos C) > \frac{4}{2} = 2$$

Nhận xét: Nếu cho $A \to 0$ và $B \to 0$ thì $C \to \pi$, thì:

$$\cos\frac{A}{2} \to 1, \cos\frac{B}{2} \to 1 \text{ và } \cos\frac{C}{2} \to 0$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \to 2$$

do vậy không thể thay số 2 bởi số lớn hơn trong bất đẳng thức trên.

b. Chứng minh vế phải, bằng việc sử dụng kết quả $xy \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, ta nhận được:

$$VT = \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A+B}{2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos\frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\cos\frac{B}{2}\right) +$$

$$+ \sqrt{3}\left[\sin\frac{A}{2}.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{B}{2}\right) + \sin\frac{B}{2}.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{A}{2}\right)\right]$$

$$\le \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \cos^2\frac{A}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \cos^2\frac{B}{2}\right)\right] +$$

$$+ \sqrt{3}\left[\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{A}{2} + \frac{1}{3}\cos^2\frac{B}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{B}{2} + \frac{1}{3}\cos^2\frac{A}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \cos\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\frac{B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{B}{2} \\ \sin\frac{B}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{A}{2} \end{cases} \Leftrightarrow A = B = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

5. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC 5

Vì sinA, sinB, sinC > 0, nên sử dụng bất đẳng thức Côsi ta được:

$$\sin A.\sin B.\sin C \le \left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3}\right)^3 \le \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

6. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC 6

Vì $\sin\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$, $\sin\frac{C}{2} > 0$, nên sử dụng bất đẳng thức Côsi ta được:

$$\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \le \left(\frac{\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}}{3}\right)^3 \le \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

7. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC 7

Nhận xét rằng:

- Nếu ΔABC tù, thì $\cos A.\cos B.\cos C < 0$, do đó bất đẳng thức luôn đúng.
- Nếu ΔABC vuông hoặc nhọn, thì $\cos A$, $\cos B$, $\cos C \geq 0$, nên sử dụng bất đẳng thức Côsi ta được:

$$\cos A.\cos B.\cos C \leq \left(\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

8. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC 8

Vì $\cos\frac{A}{2}, \cos\frac{B}{2}, \cos\frac{C}{2} > 0$, nên sử dụng bất đẳng thức Côsi ta được:

$$\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} \leq \left(\frac{\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

9. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC 9

Thực hiện phép biến đổi tương đương:

$4(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \leq 9 \Leftrightarrow 4\sin^2 A + 2(1 - \cos 2B) + 2(1 - \cos 2C) \leq 9$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 A - 4\cos(B + C).\cos(B - C) \leq 5$

$\Leftrightarrow 4(1 - \cos^2 A) + 4\cos A.\cos(B - C) \leq 5$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 A - 4\cos A.\cos(B - C) + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow [2\cos A - \cos(B - C)]^2 + 1 - \cos^2(B - C) \geq 0$, luôn đúng

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2\cos A = \cos(B - C) \\ \cos^2(B - C) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos A = \cos(B - C) \\ \sin(B - C) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos A = 1 \\ B = C \end{cases}$$

$\Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

10. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC 10

Trước hết ta có:

$\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C = \text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C.$

Vì ΔABC nhọn nên $\text{tg}A, \text{tg}B, \text{tg}C > 0$, do đó áp dụng bất đẳng thức Côsi a có:

$\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C \geq 3\sqrt[3]{\text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C} = 3\sqrt[3]{\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C}$

$\Leftrightarrow (\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C)^3 \geq 27(\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C)$

$\Leftrightarrow (\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C)^2 \geq 27 \Leftrightarrow \text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C \geq 3\sqrt{3}.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

11. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC 11

Trước hết ta có:

$$\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}.\text{tg}\frac{A}{2} = 1,$$

$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$, với mọi x, y, z.

Đề nghị bạn đọc tự chứng minh.

Nhận xét rằng:

$$(\text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2})^2 \geq 3(\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}.\text{tg}\frac{A}{2}) = 3$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

12. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC 12

Ta có:

$$1 = \text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}.\text{tg}\frac{A}{2} \geq 3\sqrt[3]{\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi A = B = C ⇔ ΔABC đều.

13. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC 13

Trước hết ta có:

cotgA.cotgB + cotgB.cotgC + cotgC.cotgA = 1,

$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$, với mọi x, y, z.

Đề nghị bạn đọc tự chứng minh.

Nhận xét rằng:

$$(\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C)^2 \geq 3(\text{cotg}A.\text{cotg}B + \text{cotg}B.\text{cotg}C + \text{cotg}C.\text{cotg}A) = 3$$

$$\Leftrightarrow \text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C \geq \sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

14. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC 14

Trước hết ta có:

$$\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2} = \text{cotg}\frac{A}{2}.\text{cotg}\frac{B}{2}.\text{cotg}\frac{C}{2}.$$

Vì $\text{cotg}\frac{A}{2}, \text{cotg}\frac{B}{2}, \text{cotg}\frac{C}{2} > 0$, do đó áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2} \geq 3\sqrt[3]{\text{cotg}\frac{A}{2}.\text{cotg}\frac{B}{2}.\text{cotg}\frac{C}{2}}$$

$$= 3\sqrt[3]{\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow (\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2})^3 \geq 27(\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2})$$

$$\Leftrightarrow (\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2})^2 \geq 27 \Leftrightarrow \text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 18: Cho ΔABC, có:

$$\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$$

Chứng minh rằng $\text{tg}A \geq \frac{8}{15}$.

Bài tập 19: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $2(ab + bc + ca) \geq (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + 8S\sqrt{3}$.

b. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \sqrt{\frac{3}{2rR}}$.

Bài tập 20: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{1}{r^2}$.

b. $\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ca} + \frac{1}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{4rR}$.

Bài tập 21: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $h_a + h_b + h_c \geq 9r$.

b. $h_a + h_b + h_c \geq \frac{1}{2}(8\sqrt[4]{3}.\sqrt{S} - 3R)$.

c. $h_a + h_b + h_c \leq 3(r + R)$.

d. $h_a + h_b + h_c \leq \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 18S}{a+b+c}$.

Bài tập 22: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} \geq 2\sqrt{3}$.

b. $\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} \geq \frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}$.

Bài tập 23: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $m_a.m_b.m_c \geq pS$.

b. $\frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}$.

c. $\frac{m_a\sqrt{3} - a}{\cot gA} + \frac{m_b\sqrt{3} - b}{\cot gB} + \frac{m_c\sqrt{3} - c}{\cot gC} \leq 2S\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

Bài tập 24: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $\dfrac{1}{(m_a + m_b - m_c)^2} + \dfrac{1}{(m_a - m_b + m_c)^2} + \dfrac{1}{(m_a - m_b - m_c)^2} \geq \dfrac{4}{3R^2}$.

b. $m_a + m_b + m_c \leq r + 4R$.

c. $m_a + m_b + m_c \geq \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}$.

d. $m_a.\cos\dfrac{A}{2} + m_b.\cos\dfrac{B}{2} + m_c.\cos\dfrac{C}{2} \geq \dfrac{3}{4}(a + b + c)$.

Bài tập 25: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $l_a + l_b + l_c \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c)$.

b. $\dfrac{ab}{l_c} + \dfrac{bc}{l_a} + \dfrac{ca}{l_b} \leq 6R$.

Bài tập 26: Cho ΔABC và M là điểm bất kỳ trong tam giác. Chứng minh rằng:

a. $MA.\cos\dfrac{A}{2} + MB.\cos\dfrac{B}{2} + MC.\cos\dfrac{C}{2} \geq \dfrac{a + b + c}{2}$.

b. $MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq \dfrac{4S}{\sqrt{3}}$.

c. (Erdoss): Gọi P, Q, R theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên AB, BC, CA. Chứng minh rằng:

$$MA + MB + MC \geq 2(MP + MQ + MR).$$

Bài tập 27: Cho ΔABC, các phân giác AA_1, BB_1 và CC_1 theo thứ tự cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng:

$$\frac{AA_1}{AA_2} + \frac{BB_1}{BB_2} + \frac{CC_1}{CC_2} \leq \frac{9}{4}.$$

Bài tập 28: Cho ΔABC, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Kéo dài AI, BI, CI theo thứ tự cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng:

a. $IA_2 + IB_2 + IC_2 \geq IA + IB + IC$.

b. $AA_2.BB_2.CC_2 \geq \dfrac{8abc\sqrt{3}}{9}$.

Bài tập 29: Cho ΔABC, với $n \in N$, chứng minh rằng:

a. $\sin nA + \sin nB + \sin nC \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

b. $\cos 2nA + \cos 2nB + \cos 2nC \geq -\dfrac{3}{2}$.

c. $\cos(2n + 1)A + \cos(2n + 1)B + \cos(2n + 1)C \leq \dfrac{3}{2}$.

Bài tập 30: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{C-A}{2} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}(\sin A + \sin B + \sin C)$.

b. $tg^2\frac{A}{2} + tg^2\frac{B}{2} + tg^2\frac{C}{2} + 8\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \geq 2$.

Bài tập 31: Cho ΔABC, chứng minh rằng:

a. $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \geq \frac{4}{3}(1 + \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2})$, ΔABC nhọn.

b. $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \geq \frac{4}{\sqrt{3}}(1 + \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2})$, ΔABC nhọn.

Bài toán 3: Nhận dạng tam giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Bài toán về nhận dạng tam giác rất hay gặp trong các đề thi môn toán. Bài toán này đề cập đến một số hướng biến đổi để nhận dạng tam giác trong các bài toán như thế.

Dạng 1: Sử dụng các phép biến đổi lượng giác để tính góc hoặc cạnh.

Dạng 2: Xác định quan hệ giữa các cạnh hoặc các góc của tam giác.

Dạng 3: Sử dụng bất đẳng thức cơ bản trong tam giác và các bất đẳng thức đại số.

Dạng 4: Sử dụng phương pháp đánh giá dựa trên các tính chất tam giác và hàm số.

Dạng 5: Dựng hình để tính toán các nhân tử trong biểu thức.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 32: Xác định dạng của ΔABC, biết:

a. $\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = 0$.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

b. $\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A.\sin B$.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

c. $3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15$.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

d. $\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot g^2 A + \cot g^2 B)$.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

e. $2\cos A.\sin B.\sin C + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

Bài tập 33: Xác định dạng của ΔABC, biết:

a. $\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} = 2\sqrt{\cos\frac{C}{2}}$.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

Mở rộng với $\sqrt[n]{\sin A} + \sqrt[n]{\sin B} = 2\sqrt[n]{\cos\frac{C}{2}}$.

b. $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} = \frac{2}{\cos\frac{C}{2}}$.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

Mở rộng với $\frac{1}{\sqrt[n]{\sin A}} + \frac{1}{\sqrt[n]{\sin B}} = \frac{2}{\sqrt[n]{\cos\frac{C}{2}}}$.

Bài tập 34: Xác định dạng của ΔABC, biết:

a. $tg^2A + tg^2B = 2tg^2\frac{A+B}{2}$, với các góc A, B nhọn.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

Mở rộng với $tg^nA + tg^nB = 2tg^n\frac{A+B}{2}$, với các góc A, B nhọn.

b. $\sqrt{tgA} + \sqrt{tgB} = 2\sqrt{\cot g\frac{C}{2}}$, với các góc A, B nhọn.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

Mở rộng với $\sqrt[n]{tgA} + \sqrt[n]{tgB} = 2\sqrt[n]{\cot g\frac{C}{2}}$, với các góc A, B nhọn.

Bài tập 35: Xác định dạng của ΔABC, biết:

a. $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{a-c}{2a}}$.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

b. $\cos A + 2\sin\frac{A}{2} = \frac{r+R}{R}$.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

c. $a = 2b.\cos C$.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

Bài tập 36: Xác định dạng của ΔABC, biết:

a. $h_a = \sqrt{p(p-a)}$.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

b. $h_a = \sqrt{bc}.\cos\frac{A}{2}$.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

Bài tập 37: Xác định dạng của ΔABC, biết:

a. $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

b. $p = (1 + \sqrt{2})R$.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

Bài tập 38: Xác định dạng của ΔABC biết:

a. sinA + sinB + sinC – (sin2A + sin2B + sin2C) = 0.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

b. cosA + cosB + cosC + cos2A + cos2B + cos2C = 0.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

c. tgA + tgB + tgC + tg2A + tg2B + tg2C = 0.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

d. cotgA + cotgB + cotgC + cotg2A + cotg2B + cotg2C = 0.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

Bài tập 39: Xác định dạng của ΔABC biết:

a. $\begin{cases} \sin B + \sin C = 2\sin A \\ \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

b. $\frac{4\sin A \sin B \sin C}{ab + bc + ca} = \frac{a + b + c}{18R^3}$.

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

c. $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} - (\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C) = \sqrt{3}$

❑ Vuông. ❑ Cân. ❑ Đều. ❑ Vuông cân.

d. $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 6\cos A\cos B\cos C$.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2\sin(A + B).\cos(A - B) + \sin 2C \\ &= 2\sin C.\cos(A - B) + 2\sin C.\cos C = 2[\cos(A - B) - \cos(A + B)]\sin C \\ &= 4\sin A.\sin B.\sin C. \end{aligned}$$

b. Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{1 + \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \cos^2 C \\ &= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C = 1 + \cos(A + B).\cos(A - B) + \cos^2 C \\ &= 1 - [\cos(A - B) + \cos(A + B)]\cos C = 1 - 2\cos A.\cos B.\cos C. \end{aligned}$$

Bài tập 2.

a. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu n = 2k với k nguyên dương, khi đó:

$$\begin{aligned}
VT &= \sin(4kA) + \sin(4kB) + \sin(4kC)\\
&= 2\sin[2k(A + B)].\cos[2k(A - B)] + \sin(4kC)\\
&= 2\sin[2k(\pi - C)].\cos[2k(A - B)] + \sin(4kC)\\
&= -2\sin(2kC).\cos[2k(A - B)] + 2\sin(2kC).\cos(2kC)\\
&= -2\sin(2kC).\{\cos[2k(A - B)] - \cos(2kC)\}\\
&= 2\sin(2kC).\{\cos[2k(A + B)] - \cos[2k(A - B)]\}\\
&= -4\sin(2kC).\sin(2kA).\sin(2kB)\\
&= 4(-1)^{n+1}\sin(nA).\sin(nB).\sin(nC), \text{ đpcm.}
\end{aligned}$$

Trường hợp 2: Nếu n = 2k + 1 với k nguyên dương – *Bạn đọc thực hiện tương tự.*

b. Làm tương tự câu a) – *Bạn đọc tự giải.*

c. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu n = 2k với k nguyên dương, khi đó:

$$\begin{aligned}
VT &= \cos^2(2kA) + \cos^2(2kB) + \cos^2(2kC)\\
&= \frac{1 + \cos(4kA)}{2} + \frac{1 + \cos(4kB)}{2} + \cos^2(2kC)\\
&= 1 + \frac{1}{2}[\cos(4kA) + \cos(4kB)] + \cos^2(2kC)\\
&= 1 + \cos[2k(A + B)].\cos[2k(A - B)] + \cos^2(2kC)\\
&= 1 + \cos(2kC).\cos[2k(A - B)] + \cos^2(2kC)\\
&= 1 + \{\cos[2k(A - B)] + \cos[2k(A + B)]\}\cos(2kC)\\
&= 1 + 2\cos(2kA).\cos(2kB).\cos(2kC)\\
&= 2(-1)^n\cos(nA).\cos(nB).\cos(nC) + 1, \text{ đpcm.}
\end{aligned}$$

Trường hợp 2: Nếu n = 2k + 1 với k nguyên dương – *Bạn đọc thực hiện tương tự.*

d. Ta có:

$$A + B + C = \pi \Leftrightarrow n(A + B + C) = n\pi \Leftrightarrow nA + nB = n\pi - \nu C$$

$$\Rightarrow tg(nA + nB) = tg(n\pi - nC) \Leftrightarrow \frac{tg(nA) + tg(nB)}{1 - tg(nA).tg(nB)} = -\,tg(nC)$$

$$\Leftrightarrow tg(nA) + tg(nB) = [1 - tg(nA).tg(nB)]tg(nC)$$

$$\Leftrightarrow tg(nA) + tg(nB) + tg(nC) = tg(nA).tg(nB).tg(nC), \text{ đpcm.}$$

e. **Sử dụng kết quả của câu d), ta có:**

$$tg(nA) + tg(nB) + tg(nC) = tg(nA).tg(nB).tg(nC)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cot g(nA)} + \frac{1}{\cot g(nB)} + \frac{1}{\cot g(nC)} = \frac{1}{\cot g(nA).\cot g(nB).\cot g(nC)}$$

$$\Leftrightarrow cotg(nA).cotg(nB) + cotg(nB).cotg(nC) + cotg(nC).cotg(nA) = 1, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 3.

a. Sử dụng định lý hàm số sin, ta có:

$$VT = \frac{2R.\sin B + 2R.\sin C}{2R.\sin A}.\sin\frac{A}{2} = \frac{2\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}}.\sin\frac{A}{2}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right).\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \cos\frac{B-C}{2}, \text{ đpcm.}$$

b. Sử dụng định lý hàm số sin, ta có:

$$VT = \frac{4R(\sin B + \sin C)}{2R.\sin A}.\sin^2\frac{A}{2} = \frac{4\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}}.\sin^2\frac{A}{2}$$

$$= 2\cos\frac{B-C}{2}.\sin\frac{A}{2} = 2\cos\frac{B-C}{2}.\cos\frac{B+C}{2} = \cos B + \cos C, \text{ đpcm.}$$

c. Sử dụng định lý hàm số sin, ta có:

$$VT = 4R^2(\sin^2A - \sin^2B)\sin A.\sin B$$

$$= 2R.\sin A.2R.\sin B.\frac{1}{2}[(1-\cos 2A) - (1-\cos 2B)]$$

$$= -\frac{1}{2}ab(\cos 2A - \cos 2B) = ab.\sin(A+B).\sin(A-B)$$

$$= ab.\sin(A-B).\sin C, \text{ đpcm.}$$

d. Ta có:

$$a.\sin A + b.\sin B + c.\sin C = 2R(\sin A.\sin A + \sin B.\sin B + \sin C.\sin C)$$

$$= 2R[\sin A.\sin(B+C) + \sin B.\sin(C+A) + \sin C.\sin(A+B)]$$

$$= 4R(\sin A.\sin B.\cos C + \sin B.\sin C.\cos A + \sin C.\sin A.\cos B). \quad (1)$$

$$a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C = 2R(\sin A.\cos A + \sin B.\cos B + \sin C.\cos C)$$

$$= R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

$$= R[2\sin(A+B).\cos(A-B) + \sin 2C]$$

$$= R[2\sin C.\cos(A-B) + 2\sin C.\cos C]$$

$$= 2R.\sin C.[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$= 4R.\sin C.\sin A.\sin B. \quad (2)$$

Chia theo vế (1) và (2), ta được:

$$\frac{a.\sin A + b.\sin B + c.\sin C}{a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C} = \cot gA + \cot gB + \cot gC, \text{ đpcm.}$$

Bài tập 4.

a. Sử dụng định lý hàm số sin, ta có:

$$VT = \frac{1}{4}(a+b+c)(b+c-a) = R^2(\sin A + \sin B + \sin C)(\sin B + \sin C - \sin A)$$

Trong đó:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.$$

$$\sin B + \sin C - \sin A = 2\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2} - \sin A$$

$$= 2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}$$

$$= 2(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2})\cos\frac{A}{2} = 4\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.$$

Từ đó, suy ra:

$$VT = 4R^2.\cos^2\frac{A}{2}.\sin B.\sin C = 4bc.\cos^2\frac{A}{2}, \text{ đpcm.}$$

b. Làm tương tự câu a) – *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 5.

a. Ta có:

$$a.\sin(B-C) = 2R.\sin A.\sin(B-C) = 2R\sin(B+C).\sin(B-C)$$
$$= R(\cos 2C - \cos 2B)$$

tương tự:

$$b.\sin(C-A) = R(\cos 2A - \cos 2C)$$
$$c.\sin(A-B) = R(\cos 2B - \cos 2A)$$

Cộng theo vế ta nhận được đẳng thức cần chứng minh.

b. Ta có:

$$(b^2 - c^2)\text{cotg}A = 4R^2(\sin^2 B - \sin^2 C)\text{cotg}A = 2R^2(\cos 2C - \cos 2B)\text{cotg}A$$
$$= -4R^2\sin(C+B)\sin(C-B).\frac{\cos A}{\sin A}$$
$$= 4R^2\sin(C-B).\cos(B+C) = 2R^2(\sin 2C - \sin 2B).$$

tương tự:

$$(c^2 - a^2)\text{cotg}B = 2R^2(\sin 2A - \sin 2C).$$
$$(a^2 - b^2)\text{cotg}C = 2R^2(\sin 2B - \sin 2A).$$

Cộng theo vế ta nhận được đẳng thức cần chứng minh.

Bài tập 6.

a. Ta có:

$$a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C = 2R(\sin A.\cos A + \sin B.\cos B + \sin C.\cos C)$$
$$= R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = R[2\sin(A+B).\cos(A-B) + \sin 2C]$$
$$= R[2\sin C.\cos(A-B) + 2\sin C.\cos C]$$
$$= 2R.\sin C.[\cos(A-B) - \cos(A+B)] = 4R.\sin C.\sin A.\sin B.$$

Suy ra:

$$VP = 2R^2.\sin C.\sin A.\sin B = \frac{8R^3.\sin A.\sin B.\sin C}{4R} = \frac{abc}{4R} = S, \text{ đpcm.}$$

b. Ta có:

$$VP = \frac{1}{4}(a.2R\sin A.\frac{\cos A}{\sin A} + b.2R\sin B.\frac{\cos B}{\sin B} + c.2R\sin C.\frac{\cos AC}{\sin C})$$

$$= \frac{R}{2}(a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C) = S \text{ theo kết quả câu a).}$$

c. Sử dụng kết quả câu b) – *Bạn đọc tự giải.*

d. Sử dụng kết quả bài tập 5 câu b) ta có:

$$(p - a)(p - b) = ab.\sin^2\frac{C}{2}$$

từ đó suy ra:

$$VP = ab.\sin^2\frac{C}{2}.\cot g\frac{C}{2} = ab.\sin^2\frac{C}{2}.\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = ab.\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}$$

$$= \frac{1}{2}ab.\sin C = S$$ – *Công thức tính diện tích tam giác theo định lí hàm số sin.*

Bài tập 7.

a. Ta có:

$$l_a = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b + c}. \quad (1)$$

Nhận xét rằng:

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos A) = \frac{1}{2}(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}) = \frac{(b + c)^2 - a^2}{4bc}$$

$$= \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{4bc} = \frac{p(p - a)}{bc}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$l_a = \frac{2bc}{b + c}.\sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}} = \frac{\sqrt{bc(a + b + c)(b + c - a)}}{b + c}, \text{ đpcm.}$$

b. Suy ra từ kết quả câu a).

c. Ta lần lượt có:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).l_c = \frac{a + b}{ab}.\frac{2ab.\cos\frac{C}{2}}{a + b} = 2\cos\frac{C}{2},$$

$$\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).l_a = 2\cos\frac{A}{2},$$

$$\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right).l_b = 2\cos\frac{B}{2}.$$

Cộng theo vế ta nhận được đẳng thức cần chứng minh.

Bài tập 8.

a. Tham khảo bài tập 3 câu d).

b. Sử dụng định lý hàm số sin, ta có:

$$VT = b.b.\sin 2C + c.c.\sin 2B$$

$$= b.\frac{c.\sin B}{\sin C}.2\sin C.\cos C + c.\frac{b.\sin C}{\sin B}.2\sin B.\cos B$$

$$= 2ab(\sin B.\cos C + \sin C.\cos B) = 2bc\sin(B + C),\ \text{đpcm.}$$

Bài tập 9.

a. $\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C = \dfrac{(a^2 + b^2 + c^2)R}{abc}$.

Ta lần lượt có:

$$\text{cotg}A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S},\ \text{cotg}B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S},\ \text{cotg}C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$$

Từ đó, suy ra:

$$\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4.\dfrac{abc}{4R}} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)R}{abc},\ \text{đpcm.}$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng các phép biến đổi lượng giác, ta có:

$$(b - c).\text{cotg}\frac{A}{2} = 2R(\sin B - \sin C).\text{cotg}\frac{A}{2}$$

$$= 4R.\cos\frac{B+C}{2}.\sin\frac{B-C}{2}.\text{cotg}\frac{A}{2}$$

$$= 4R.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B-C}{2}.\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = 4R.\sin\frac{B-C}{2}.\sin\frac{B+C}{2}$$

$$= 2R(\cos C - \cos B).$$

Tương tự:

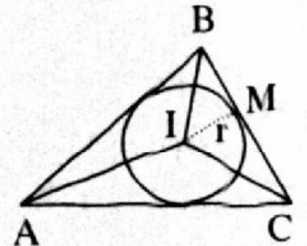
$$(c - a).\text{cotg}\frac{B}{2} = 2R(\cos A - \cos C)\ \text{và}\ (a - b).\text{cotg}\frac{C}{2} = 2R(\cos B - \cos A).$$

Cộng theo vế ta nhận được đẳng thức cần chứng minh.

Cách 2: Sử dụng các phương pháp hình học, ta có:

$$a = BC = BM + MC = r.\text{cotg}\frac{B}{2} + r.\text{cotg}\frac{C}{2} = r(\text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2}).\ (1)$$

tương tự:



$$b = r(\cot g\frac{C}{2} + \cot g\frac{A}{2}),\quad (2)$$

$$c = r(\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2}).\quad (3)$$

Thay (1), (2), (3) vào VT của đẳng thức, ta được điều cần chứng minh.

Bài tập 10.

a. Ta có:

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c) = R(\sin A + \sin B + \sin C) = R[2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + \sin C]$$

$$= R[2\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}]$$

$$= 2R(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2})\cos\frac{C}{2} = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

b. Sử dụng kết quả câu a) và từ đánh giá:

$$S = pr = \frac{abc}{4R}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{abc}{4Rp} = \frac{8R^3.\sin A.\sin B.\sin C}{4R.4R\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}} = 4R.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}.$$

c. Ta lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Chia theo vế các đẳng thức ở câu b) và câu a) ta được đẳng thức cần chứng minh.

Cách 2: Ta có:

$$S = pr = p(p-a)\text{tg}\frac{A}{2} = p(p-b)\text{tg}\frac{B}{2} = p(p-c)\text{tg}\frac{C}{2}$$

suy ra:

$$S^3 = p(p-a)\text{tg}\frac{A}{2}.p(p-b)\text{tg}\frac{B}{2}.p(p-c)\text{tg}\frac{C}{2} = S^2 p^2.\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow p^2.\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2} = S = pr \Leftrightarrow \frac{r}{p} = \text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2}, \text{ đpcm.}$$

d. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

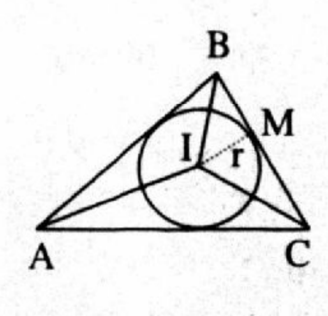
Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Xét ΔIBC, ta có:

$$\frac{IB}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{BC}{\sin\widehat{BIC}} = \frac{a}{\sin\frac{B+C}{2}} = \frac{a}{\cos\frac{A}{2}} \Leftrightarrow IB = \frac{a.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.\quad (1)$$

Mặt khác:

$$IB = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}}. \qquad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra:

$$\frac{a.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}} \Leftrightarrow r = \frac{a.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

Cách 2: Giả sử đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với BC tại M, ta có:

$$a = BC = BM + MC = r.\text{cotg}\frac{B}{2} + r.\text{cotg}\frac{C}{2} = \frac{r.\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}} = \frac{r.\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{a.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

Bài tập 11.

a. Sử dụng kết quả của bài tập 10 câu d), ta có:

$$r = \frac{a.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} \Leftrightarrow \frac{\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{r}{a} = \frac{r}{2R.\sin A}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{2\sin A.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{4\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$= 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}. \qquad (*)$$

Sử dụng đẳng thức cơ bản 2, ta có:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

do đó (*) được chuyển thành:

$$1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C, \text{ đpcm.}$$

b. Sử dụng kết quả của bài tập 6 câu d), ta có:

$$S = (p-a)(p-b).\text{cotg}\frac{C}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4}(b+c-a)(a+c-b) = S.\text{tg}\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow c^2-(a-b)^2=4S.\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=4S.\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}}=4S.\frac{1-\cos C}{\sin C}$$

$$\Leftrightarrow c^2=(a-b)^2+4S.\frac{1-\cos C}{\sin C}\text{, đpcm.}$$

Bài tập 12.

a. Ta có:

$$S=\frac{abc}{4R}=\frac{8R^3.\sin A.\sin B.\sin C}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C\text{, đpcm.}$$

b. Ta có:

$$S=pr=\frac{1}{2}r(a+b+c)=Rr(\sin A+\sin B+\sin C)\text{, đpcm.}$$

Bài tập 13.

a. Theo định lí đường trung tuyến, ta có:

$$b^2+c^2=2AM^2+\frac{a^2}{2}\Leftrightarrow b^2+c^2=\frac{c^2}{2}+\frac{a^2}{2}\Leftrightarrow a^2-c^2=2b^2\text{, đpcm.}$$

b. Theo a), ta có:

$$a^2-c^2=2b^2\Leftrightarrow 4R^2.\sin^2A-4R^2.\sin^2C=8R^2.\sin^2B$$

$$\Leftrightarrow \sin^2A=2\sin^2B+\sin^2C\text{, đpcm.}$$

Bài tập 14. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 15. Bạn đọc tự khẳng định ΔABC nhọn.

Sử dụng các công thức:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A,\ \text{cotg}B=\frac{a^2+c^2-b^2}{4S},\ \text{cotg}C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4S}.$$

Ta có:

$$a^4=b^4+c^4\Leftrightarrow a^4-(b^2-c^2)^2=2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{8S^2}{b^2c^2}=\frac{4S}{a^2+c^2-b^2}.\frac{4S}{a^2+b^2-c^2}\Leftrightarrow 2\left(\frac{2S}{bc}\right)^2=\frac{1}{\text{cotg}B}.\frac{1}{\text{cotg}C}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2A=\text{tg}B.\text{tg}C\text{, đpcm.}$$

Bài tập 16. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 17. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 18. *Hướng dẫn*: Sử dụng các công thức:

$$\text{cotg}A+\text{cotg}B+\text{cotg}C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S};$$

$$\sin^2A=\left(\frac{2S}{bc}\right)^2,\ \sin^2B=\left(\frac{2S}{ac}\right)^2,\ \sin^2C=\left(\frac{2S}{ab}\right)^2$$

ta chuyển giả thiết về dạng:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}=\left(\frac{2S}{bc}\right)^2+\left(\frac{2S}{ac}\right)^2+\left(\frac{2S}{ab}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)a^2b^2c^2=16S^3(a^2+b^2+c^2)\Leftrightarrow a^2b^2c^2=16S^3.$$

Bài tập 19.

a. Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh về dạng:

$$(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4S\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{2S}{\sin C} + \frac{2S}{\sin A} + \frac{2S}{\sin B}\right) - 4S(\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C) \geq 4S\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sin A} - \text{cotg}A\right) + \left(\frac{1}{\sin B} - \text{cotg}B\right) + \left(\frac{1}{\sin C} - \text{cotg}C\right) \geq \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos A}{\sin A} + \frac{1 - \cos B}{\sin B} + \frac{1 - \cos C}{\sin C} \geq \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}} + \frac{2\sin^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{B}{2}} + \frac{2\sin^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}} \geq \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}\text{, luôn đúng.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

b. Sử dụng các công thức:

$$S = \frac{abc}{4R} = pr \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} \text{ và } r = \frac{S}{p}$$

từ đó, suy ra:

$$\frac{3}{2rR} = \frac{3}{2\frac{S}{p}.\frac{abc}{4S}} = \frac{6p}{abc} = \frac{3(a + b + c)}{abc}.$$

Vậy, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \sqrt{\frac{3(a + b + c)}{abc}} \Leftrightarrow \left(\frac{ab + bc + ca}{abc}\right)^2 = \frac{3(a + b + c)}{abc}$$

$$\Leftrightarrow (ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$$

$$\Leftrightarrow (ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2 \geq 0\text{, luôn đúng.}$$

Bài tập 20.

a. Sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$VT = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(p - a)^2} + \frac{1}{(p - b)^2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(p - b)^2} + \frac{1}{(p - c)^2}\right] + $$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(p - c)^2} + \frac{1}{(p - a)^2}\right]$$

$$\geq \frac{1}{(p - a)(p - b)} + \frac{1}{(p - b)(p - c)} + \frac{1}{(p - c)(p - a)}$$

$$= \frac{(p - a) + (p - b) + (p - c)}{(p - a)(p - b)(p - c)} = \frac{p}{(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$= \frac{p^2}{p(p - a)(p - b)(p - c)} = \frac{p^2}{S^2} = \frac{1}{r^2}\text{, đpcm.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

b. Sử dụng các công thức:

$$S = \frac{abc}{4R} = pr \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} \text{ và } r = \frac{S}{p}$$

từ đó, suy ra:

$$\frac{1}{4rR} = \frac{1}{4\frac{S}{p}.\frac{abc}{4S}} = \frac{p}{abc} = \frac{a+b+c}{2abc}.$$

Vậy, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab} \le \frac{a+b+c}{2abc}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta có nhận xét:

$$\frac{1}{a^2+bc} \le \frac{1}{2\sqrt{a^2bc}} = \frac{1}{2a\sqrt{bc}} = \frac{\sqrt{bc}}{2abc} \le \frac{\frac{1}{2}(b+c)}{2abc} = \frac{b+c}{4abc},$$

$$\frac{1}{b^2+ca} \le \frac{c+a}{4abc},$$

$$\frac{1}{c^2+ab} \le \frac{a+b}{4abc}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab} \le \frac{2(a+b+c)}{4abc} = \frac{a+b+c}{2abc}, \text{ đpcm.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

Bài tập 21.

a. Sử dụng các công thức:

$$S = pr = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$$

từ đó, suy ra:

$$r = \frac{S}{p},\ h_a = \frac{2S}{a},\ h_b = \frac{2S}{b},\ h_c = \frac{2S}{c}.$$

Vậy, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} \ge \frac{9S}{p} \Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 9 \text{ – luôn đúng theo Côsi.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

b. Sử dụng các công thức:

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$$

từ đó, suy ra:

$$R = \frac{abc}{4S},\ h_a = \frac{2S}{a},\ h_b = \frac{2S}{b},\ h_c = \frac{2S}{c}.$$

Vậy, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}\ge\frac{1}{2}\left(8\sqrt[4]{3}.\sqrt{S}-\frac{3abc}{4S}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}+\frac{3abc}{8S}\ge 4\sqrt[4]{3}.\sqrt{S}. \qquad (*)$$

Sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}+\frac{3abc}{8S}\ge 4\sqrt[4]{\frac{2S}{a}.\frac{2S}{b}.\frac{2S}{c}.\frac{3abc}{8S}}=4\sqrt[4]{3}.\sqrt{S}, \text{ đpcm.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

c), d) *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 22. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 23.

a. Ta có:

$$pS=p.\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{p(p-a)}\sqrt{p(p-b)}\sqrt{p(p-c)}$$

Trong đó bằng việc sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôxki ta có:

$$\sqrt{p(p-a)}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4}}\le\sqrt{\frac{(1+1)(b^2+c^2)-a^2}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}}=\sqrt{m_a^2}=m_a,$$

$$\sqrt{p(p-b)}\le m_b,$$

$$\sqrt{p(p-c)}\le m_c.$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$pS\le m_a.m_b.m_c$, đpcm.

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

b. Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có nhận xét rằng:

$$a.m_a=\frac{1}{2}a\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{(3a^2)(2b^2+2c^2-a^2)}$$

$$\le\frac{1}{4\sqrt{3}}(3a^2+2b^2+2c^2-a^2)=\frac{1}{2\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{a.m_a}\ge\frac{2\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2}\Leftrightarrow\frac{a}{m_a}\ge\frac{2a^2\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2},$$

Tương tự ta cũng có $\frac{b}{m_b}\ge\frac{2b^2\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2}$, $\frac{c}{m_c}\ge\frac{2c^2\sqrt{3}}{a^2+b^2+c^2}$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}\ge\frac{2\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}=2\sqrt{3}, \text{ đpcm.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

c. *Hướng dẫn*: Sử dụng định lí hàm số cotg.

Bài tập 24.

a. *Hướng dẫn*: Sử dụng các kết quả:

- $(m_a + m_b - m_c)(m_a - m_b + m_c)(-m_a + m_b + m_c) \le m_a.m_b.m_c$.
- Bất đẳng thức Côsi.
- $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C \le \dfrac{9}{4}$.

Chú ý: Bạn đọc hãy chứng minh kết quả tổng quát:

$$\frac{1}{(m_a + m_b - m_c)^n} + \frac{1}{(m_a - m_b + m_c)^n} + \frac{1}{(m_a - m_b - m_c)^n} \ge 3\left(\frac{2}{3R}\right)^n.$$

b. *Hướng dẫn*: Sử dụng các kết quả:

- $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}$.
- $r = 4R.\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}$.
- Tính chất cạnh của tam giác là "*Tổng hai cạnh lớn hơn cạnh còn lại*".

Để thực hiện bạn đọc cần xét hai trường hợp là ΔABC nhọn và ΔABC tù.

c. Ta đi chứng minh:

$$m_a \ge \frac{b^2 + c^2}{4R} \Leftrightarrow 2m_a \ge b.\frac{b}{2R} + c.\frac{c}{2R} = b.\sin B + c.\sin C$$

$$\Leftrightarrow 4m_a^2 \ge (b.\sin B + c.\sin C)^2 \Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2 - a^2 \ge (b.\sin B + c.\sin C)^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 + 2bc.\cos A \ge b^2.\sin^2B + c^2.\sin^2C + 2bc.\sin B.\sin C$$

$$\Leftrightarrow b^2.\cos^2B + c^2.\cos^2C - 2bc.\cos(B + C) - 2bc.\sin B.\sin C \ge 0$$

$$\Leftrightarrow b^2.\cos^2B + c^2.\cos^2C - 2bc.\cos B.\cos C \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (b.\cos B + c.\cos C)^2 \ge 0, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, ta có các bất đẳng thức:

$$m_a \ge \frac{b^2 + c^2}{4R},\ m_b \ge \frac{a^2 + c^2}{4R},\ m_c \ge \frac{a^2 + b^2}{4R}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$m_a + m_b + m_c \ge \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{4R} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}, \text{ đpcm.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

Bài tập 25.

a. Sử dụng kết quả trong bài 7 câu a), ta có:

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}.\sqrt{p(p-a)} \overset{\text{Côsi}}{\le} \frac{b+c}{b+c}\sqrt{p(p-a)} = \sqrt{p(p-a)},$$

$l_b \le \sqrt{p(p-b)}$,

$l_c \le \sqrt{p(p-c)}$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$l_a + l_b + l_c \le \sqrt{p(p-a)} + \sqrt{p(p-b)} + \sqrt{p(p-c)}$$

$$= \sqrt{p}\,(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c})$$

$$\overset{\text{Bunhiacoxpki}}{\le} \sqrt{p}\,(\sqrt{(1+1+1)[(p-a)+(p-b)+(p-c)}\,) = p\sqrt{3}.$$

$$\Leftrightarrow l_a + l_b + l_c \le \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c), \text{ đpcm.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

b. Ta có:

$$\frac{ab}{l_c} = \frac{ab}{\dfrac{2ab.\cos\frac{C}{2}}{a+b}} = \frac{a+b}{2\cos\frac{C}{2}} = \frac{2R(\sin A + \sin B)}{2\cos\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{2R\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = 2R.\cos\frac{A-B}{2} \le 2R.$$

Tương tự ta cũng có:

$$\frac{bc}{l_a} \le 2R \text{ và } \frac{ca}{l_b} \le 2R.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{ab}{l_c} + \frac{bc}{l_a} + \frac{ca}{l_b} \le 6R, \text{ đpcm.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

Bài tập 26. Bạn đọc tự vẽ hình.

a. Sử dụng công thức hình chiếu và tính chất $\cos\alpha \le 1$.

b. Gọi G là trọng tâm ΔABC, khi đó:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0},$$

$$MA^2 = (\overrightarrow{MA})^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 = MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}$$

$$MB^2 = (\overrightarrow{MB})^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 = MG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}$$

$$MC^2 = (\overrightarrow{MC})^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 = MG^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}$$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2) + 2\overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

$$\ge GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

$$\ge \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{4p^2}{9} \ge \frac{4S}{\sqrt{3}}, \text{ đpcm.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

c. Đi chứng minh

$$MA = \frac{PR}{\sin A} \geq MP.\frac{\sin B}{\sin A} + MR.\frac{\sin C}{\sin A},$$

Tương tự cho MB và MC.

Bài tập 27. Bạn đọc tự vẽ hình.

Bằng việc xét hai tam giác đồng dạng ta nhận được:

$$\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{2bc}{(b+c)^2}(1 + \cos A) \overset{\text{Côsi}}{\leq} \frac{1}{2}(1 + \cos A)$$

suy ra:

$$\frac{AA_1}{AA_2} + \frac{BB_1}{BB_2} + \frac{CC_1}{CC_2} \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C).$$

Sử dụng bất đẳng thức $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ suy ra:

$$\frac{AA_1}{AA_2} + \frac{BB_1}{BB_2} + \frac{CC_1}{CC_2} \leq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}.\frac{3}{2} = \frac{9}{4}, \text{ đpcm.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

Bài tập 28. Bạn đọc tự vẽ hình và sử dụng hướng dẫn sau:

a. Sử dụng các kết quả:

- $r = 4R\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$.
- $(x + y + z)^2 \leq 3(xy + yz + zx)$.
- $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$.

b. Bằng việc chứng minh $AA_2 = 2R.\cos\frac{B-C}{2}$, từ đó thiết lập biểu thức $AA_2.BB_2.CC_2$, rồi sử dụng kết quả $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Bài tập 29. *Hướng dẫn*:

a. Tham khảo cách chứng minh $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

b), c) Tham khảo cách chứng minh bất đẳng thức:

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}. \quad (*)$$

Cụ thể, biến đổi tương dương bất đẳng thức (*) như sau:

$$\cos 2A + 2\cos(B + C).\cos(B - C) \geq -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 A - 1 - 2\cos A.\cos(B - C) \geq -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 A - 4\cos A.\cos(B - C) + 1 \geq 0,$$

$$\Leftrightarrow [2\cos A - \cos(B - C)]^2 + 1 - \cos^2(B - C) \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Bài tập 30. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 31. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 32.

a. Nhận xét rằng:

$$VT = 2\sin 2(A + B).\cos 2(A - B) + \sin 4C$$
$$= -2\sin 2C.\cos 2(A - B) + 2\sin 2C.\cos 2C$$
$$= -2[\cos 2(A - B) - \cos 2C].\sin 2C = -2[\cos(A - B) - \cos 2(A + B)].\sin 2C$$
$$= -4\cos 2A.\cos 2B.\sin 2C$$

Do đó, ta được:

$$-4\cos 2A.\cos 2B.\sin 2C = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2A = 0 \\ \sin 2B = 0 \\ \sin 2C = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A = \dfrac{\pi}{2} \\ B = \dfrac{\pi}{2} \\ C = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông.}$$

b. Biến đổi giả thiết về dạng:

$$2\sin(A + B).\cos(A - B) = 2[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$
$$\Leftrightarrow \sin C.\cos(A - B) = \cos(A - B) + \cos C$$
$$\Leftrightarrow (1 - \sin C)\cos(A - B) + \cos C = 0$$
$$\Leftrightarrow (\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2})^2\cos(A - B) + \cos^2\frac{C}{2} - \sin^2\frac{C}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow (\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2})[(\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2})\cos(A - B) + \cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}] = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2} - \sin\frac{C}{2} = 0 \Leftrightarrow tg\frac{C}{2} = 1 \Rightarrow \frac{C}{2} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

c. Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta có:

$$VT = (3\cos A + 4\sin A) + (6\sin B + 8\cos B)$$
$$\overset{\text{Bunhiacoxpki}}{\leq} \sqrt{(3^2 + 4^2)(\cos^2 A + \sin^2 A)} + \sqrt{(6^2 + 8^2)(\sin^2 B + \cos^2 B)}$$
$$= 5 + 10 = 15.$$

Do đó (1) xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{\sin B}{\cos B} = \dfrac{6}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \cot gA = tgB = \cot g(\frac{\pi}{2} - B) \Rightarrow A + B = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

d. Biến đổi giả thiết về dạng:

$$\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} - \text{cotg}^2 A = \text{cotg}^2 B - \frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} - \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{\cos^2 B}{\sin^2 B} - \frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 A\cos^2 B - \sin^2 B\cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{\sin^2 A\cos^2 B - \sin^2 B\cos^2 A}{\sin^2 B}$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 A - \sin^2 B)\sin(A + B).\sin(A - B) = 0$$

$$\overset{\sin(A+B)\neq 0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}\sin A = \sin B\\ \sin(A - B) = 0\end{array}\right. \Rightarrow A = B \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại C.}$$

e. Ta có:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(2R.\sin B)^2 + (2R.\sin C)^2 - (2R.\sin A)^2}{2.2R.\sin B.2R.\sin C}$$

$$= \frac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin B.\sin C}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos A.\sin B.\sin C = \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A.$$

Khi đó ta được:

$$\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A + \sqrt{3}(\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow (\sin A - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos B = \cos C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{2\pi}{3} \text{ và } B = C = \frac{\pi}{6}.$$

Bài tập 33.

a. Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôxki ta có:

$$(\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B})^2 \le (1^2 + 1^2)(\sin A + \sin B) = 4\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}$$

$$= 4\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} \le 4\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} \le 2\sqrt{\cos\frac{C}{2}}.$$

Vậy, giả thiết tương đương với:

$$\begin{cases}\sqrt{\sin A} = \sqrt{\sin B}\\ \cos\dfrac{A-B}{2} = 1\end{cases} \Rightarrow A = B \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại C.}$$

Bạn đọc tự chứng minh cho phần mở rộng.

b. Sử dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\ge\frac{2}{\sqrt{\sin A.\sin B}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos C]}}\ge\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos C)}}=\frac{2}{\sqrt{\cos^2\frac{C}{2}}}=\frac{2}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Vậy, giả thiết tương đương với:

$$\begin{cases}\sin A=\sin B\\ \cos(A-B)=1\end{cases}\Rightarrow A=B\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại C.}$$

Bạn đọc tự chứng minh cho phần mở rộng.

Bài tập 34.

a. Trước hết chúng ta đi chứng minh bổ đề:

Bổ đề: Với ΔABC có các góc A, B nhọn thì $tgA+tgB\ge 2tg\frac{A+B}{2}$.

Thật vậy:

$$tgA+tgB=\frac{\sin(A+B)}{\cos A.\cos B}=\frac{\sin(A+B)}{\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]}\ge\frac{2\sin(A+B)}{\cos(A+B)+1}$$

$$\ge 2tg\frac{A+B}{2}\text{, đpcm.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi A = B.

Khi đó, sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôxki ta có:

$$tg^2A+tg^2B=\frac{1}{2}(1^2+1^2)(tg^2A+tg^2B)\ge\frac{1}{2}(tgA+tgB)^2$$

$$\ge\frac{1}{2}\left[2tg\frac{A+B}{2}\right]^2=2tg^2\frac{A+B}{2}.$$

Vậy, giả thiết tương đương với:

$$\begin{cases}A=B\\ tgA=tgB\end{cases}\Rightarrow A=B\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại C.}$$

Bạn đọc tự chứng minh cho phần mở rộng.

b. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 35.

a. Biến đổi giả thiết về dạng:

$$\sin^2\frac{B}{2}=\frac{a-c}{2a}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(1-\cos B)=\frac{1}{2}-\frac{c}{2a}\Leftrightarrow\cos B=\frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow\cos B=\frac{2R.\sin C}{2R.\sin A}\Leftrightarrow 2\sin A.\cos B=2\sin C$$

$$\Leftrightarrow\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin C\Leftrightarrow\sin C+\sin(A-B)=2\sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin(A-B)=\sin C \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A-B=C \\ A-B=\pi-C \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=B+C \\ A-B+C=\pi \text{ loại} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow A=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A.}$$

b. Sử dụng kết quả đã được chứng minh ở bài tập 10 câu b) là:

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Ta biến đổi giả thiết về dạng:

$$1-2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}=\frac{r}{R}+1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{A}{2}-2\sin\frac{A}{2}+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=0$$

$$\overset{\sin\frac{A}{2}\neq 0}{\Leftrightarrow} \sin\frac{A}{2}+2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B-C}{2}=1 \Rightarrow B=C \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại A.}$$

c. Biến đổi giả thiết về dạng:

$$2R.\sin A=4R.\sin B.\cos C \Leftrightarrow \sin A=\sin(B+C)+\sin(B-C)$$

$$\Leftrightarrow \sin(B-C)=0 \Rightarrow B=C \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại A.}$$

Bài tập 36.

a. Biến đổi giả thiết về dạng:

$$a.h_a=a\sqrt{p(p-a)} \Leftrightarrow 2S=a\sqrt{p(p-a)}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=a\sqrt{p(p-a)} \Leftrightarrow 2\sqrt{(p-b)(p-c)}=a$$

$$\Leftrightarrow (a-b+c)(a+b-c)=a^2 \Leftrightarrow a^2-(b-c)^2=a^2 \Leftrightarrow b=c$$

$$\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại A.}$$

b. Biến đổi giả thiết về dạng:

$$a\sqrt{bc}.\cos\frac{A}{2}=ah_a=2S=bc.\sin A=2bc.\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow a=2\sqrt{bc}.\sin\frac{A}{2} \Leftrightarrow a^2=4bc.\sin^2\frac{A}{2} \Leftrightarrow R^2.\sin^2 A=4R^2.\sin B.\sin C\sin^2\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}[\cos(B-C)-\cos(B+C)] \Leftrightarrow 1+\cos A=\cos(A-B)+\cos A$$

$$\Leftrightarrow \cos(A-B)=1 \Leftrightarrow B=C \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại A.}$$

Bài tập 37.

a. Biến đổi giả thiết về dạng:

$$\frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{1}{4}(a^2+b^2) \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab.\sin C = 0 \Leftrightarrow (a-b)+2ab(1-\sin C)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ \sin C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ C=\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông cân tại C.}$$

b. Biến đổi giả thiết về dạng:

$$a+b+c = 2(1+\sqrt{2})R \Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C = 1+\sqrt{2}.$$

Tới đây bạn đọc làm tiếp với kết luận ΔABC vuông cân.

Bài tập 38. ΔABC đều.

Bài tập 39. Xác định dạng của ΔABC biết:

a. $\begin{cases} \sin B + \sin C = 2\sin A \\ \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$.

Với giả thiết thứ nhất, ta được:

$$2\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2} = 4\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B-C}{2} = 2\sin\frac{A}{2} = 2\cos\frac{B+C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = 2(\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2})$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{3}.$$

Với giả thiết thứ hai sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} \geq 2\sqrt{\text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Vậy, hệ của giả thiết tương đương với:

$$\begin{cases} \text{tg}\frac{B}{2} = \text{tg}\frac{C}{2} \\ \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=C \\ \text{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=C \\ \frac{B}{2} = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow B=C=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

b. Sử dụng định lí hàm số sin biến đổi giả thiết về dạng:

$$\frac{abc}{ab+bc+ca} = \frac{a+b+c}{9} \Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) = 9abc. \quad (*)$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 3\sqrt[3]{abc}\,.\,3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 9abc.$$

Do đó (*) tương đương với:

$$\begin{cases} a = b = c \\ ab = bc = ca \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

c. Nhận xét rằng:

$$\frac{1}{\sin x} - \text{cotg}x = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}} = \text{tg}\frac{x}{2}.$$

Từ đó ta chuyển được giả thiết về dạng:

$$\text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{3}. \quad (*)$$

Sử dụng bất đẳng thức cơ bản 11 ta có:

$$\text{tg}\frac{A}{2} + \text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}.$$

Do đó (*) tương đương với dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

d. ΔABC đều.

CHƯƠNG II
PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

CHỦ ĐỀ 1
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

***Định nghĩa**: Phương trình lượng giác là phương trình chứa một hay nhiều hàm số lượng giác của một ẩn.*

II. BỐN DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Giải và biện luận phương trình:

$$\sin x = m$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1. Nếu $|m| > 1$ phương trình vô nghiệm.

Bước 2. Nếu $|m| \le 1$, xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua sin của góc đặc biệt, giả sử α, khi đó phương trình có dạng :

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua sin của góc đặc biệt, khi đó đặt $m = \sin\alpha$, ta được:

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có hai họ nghiệm.

Đặc biệt

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Bài toán 2: Giải và biện luận phương trình:

$$\cos x = m.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Bước 1. Nếu $|m| > 1$ phương trình vô nghiệm.

Bước 2. Nếu $|m| \le 1$, xét hai trường hợp:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua cos của góc đặc biệt, giả sử α, khi đó phương trình có dạng :

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}$$

Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua cos của góc đặc biệt, khi đó đặt $m = \cos\alpha$, ta được

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có hai họ nghiệm.

Đặc biệt

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

Bài toán 3: Giải và biện luận phương trình:

$$\text{tg}x = m.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Đặt điều kiện:

$$\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua tg của góc đặc biệt, giả sử α, khi đó phương trình có dạng:

$$\text{tg}x = \text{tg}\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua tg của góc đặc biệt, khi đó đặt $m = \text{tg}\alpha$, ta được

$$\text{tg}x = \text{tg}\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có một họ nghiệm.

Nhận xét: Như vậy với mọi giá trị của tham số m phương trình $\text{tg}x = m$ luôn có nghiệm.

Bài toán 4: Giải và biện luận phương trình:

$$\cot gx = m.$$

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta biện luận theo các bước sau:

Đặt điều kiện:

$$\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Xét hai khả năng:

Khả năng 1: Nếu m được biểu diễn qua cotg của góc đặc biệt, giả sử α, khi đó phương trình có dạng :

$$\cot gx = \cot g\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Khả năng 2: Nếu m không biểu diễn được qua cotg của góc đặc biệt, khi đó đặt m = cotgα, ta được

$$\cot gx = \cot g\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Trong cả hai trường hợp ta đều kết luận phương trình có một họ nghiệm.

Nhận xét: Như vậy với mọi giá trị của tham số phương trình luôn có nghiệm.

Bài toán 5: Biện luận theo m số nghiệm thuộc (α, β) của phương trình lượng giác cơ bản.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Giả sử với phương trình:

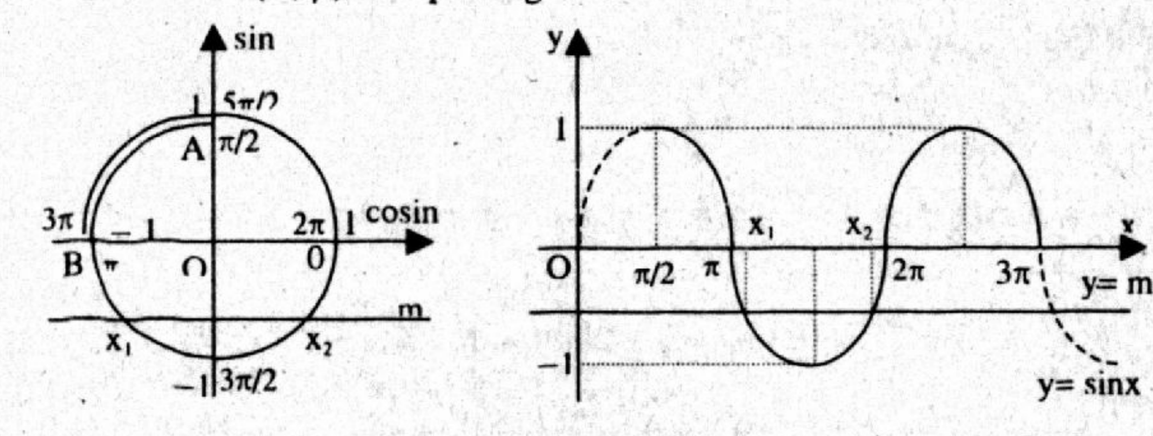
$$\sin x = m.$$

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước sau:

a. Biểu diễn (α, β) trên đường tròn đơn vị thành cung $\overset{\frown}{AB}$

b. Tịnh tiến đường thẳng m song song với trục cosin, khi đó số giao điểm của nó với cung $\overset{\frown}{AB}$ bằng số nghiệm thuộc (α, β) của phương trình.



Cách 2: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Vẽ đồ thị hàm số y = sinx, lấy trên (α, β).

Bước 2. Tịnh tiến đường thẳng y = m song song với trục Ox, khi đó số giao điểm của nó với phần đồ thị hàm số y = sinx bằng số nghiệm thuộc (α, β) của phương trình.

Chú ý: Phương pháp trên được mở rộng tự nhiên cho:

1. Phương trình cosx = m, với lưu ý khi sử dụng cách 1 ta tịnh tiến đường thẳng m song song với trục sin.
2. Với các phương trình tgx = m và cotgx = m ta chỉ có thể sử dụng cách 2.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a. $\sin(\pi\cos 2x) = 1$.

❑ $x = l\pi, l \in \mathbf{Z}$. ❑ $x = \pi + 2l\pi, l \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in \mathbf{Z}$. ❑ $x = \pm\frac{\pi}{6} + l\pi, l \in \mathbf{Z}$.

b. $\cos(\pi\cos 3x) = 1$.

❑ $x = \frac{\pi}{8} + \frac{l\pi}{4}, l \in \mathbf{Z}$. ❑ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{l\pi}{2}, l \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \frac{\pi}{6} + \frac{l\pi}{3}, l \in \mathbf{Z}$. ❑ $x = \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in \mathbf{Z}$.

c. $\cos(\pi\sin x) = 1$.

❑ $x = l\pi, l \in \mathbf{Z}$. ❑ $x = \pi + 2l\pi, l \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in \mathbf{Z}$. ❑ $x = \frac{\pi}{4} + l\pi, l \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

a. $\sin\frac{\pi}{x} = \cos(\pi x)$.

b. $\cos[\frac{\pi}{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})] = \frac{1}{2}$.

Bài tập 3: Giải các phương trình sau:

a. $\text{tg}[\frac{\pi}{4}(\cos x - \sin x)] = 1$.

❑ $x = 2l\pi$ và $x = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi, l \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \frac{\pi}{2} + l\pi$ và $x = \pi + 2l\pi, l \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \pm\frac{\pi}{4} + l\pi, l \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi$ và $x = \frac{\pi}{6} + 2l\pi, l \in \mathbf{Z}$.

b. $\text{cotg}[\frac{\pi}{4}(\cos x + \sin x)] = 1.$

- ❑ $x = 2l\pi$ và $x = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi, l \in \mathbf{Z}.$
- ❑ $x = 2l\pi$ và $x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi, l \in \mathbf{Z}.$
- ❑ $x = \frac{\pi}{2} + l\pi, l \in \mathbf{Z}.$
- ❑ $x = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + 2l\pi, l \in \mathbf{Z}.$

Bài tập 4: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình:

$$\cos[\frac{\pi}{8}(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800})] = 1.$$

- ❑ $x = -9$ và .. $= 0.$
- ❑ $x = -7$ và $x = -9.$
- ❑ $x = -7$ và $x = -31.$
- ❑ $x = 0$ và $x = -31.$

Bài tập 5: Giải phương trình:

$$\sqrt{-x^8 + 3x^4 - 2}\,.\sin[\pi(16x^2 + 2x)] = 0.$$

Bài tập 6: Giải và biện luận phương trình:

$$\frac{a^2}{1 - \text{tg}^2 x} = \frac{\sin^2 x + a^2 - 2}{\cos 2x}.$$

Bài tập 7: Giải và biện luận các phương trình sau:

a. $\cos(x + \alpha) + \cos(x - \alpha) = 2\cos\alpha.$

b. $\sin(x + \alpha) + \cos(x - \alpha) = 1 + \sin\alpha.$

c. $(m + 1)\sin 2x + 1 - m^2 = 0.$

d. $(m + 2)\text{tg}2x - \sqrt{m} = 0.$

Bài tập 8: Biện luận theo m số nghiệm của phương trình

a. $\sin x = m$, với $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}].$

b. $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = m$, với $x \in [-\frac{\pi}{24}, \frac{19\pi}{8}].$

c. $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = m$, với $x \in [\frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}].$

d. $\text{cotg}(x - \frac{\pi}{4}) = m$, với $x \in (-\frac{5\pi}{4}, \pi).$

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Ta biến đổi:

$$\sin(\pi\cos 2x) = 1 \Leftrightarrow \pi\cos 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbf{Z}. \quad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\left|\frac{1}{2}+2k\right| \le 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \le k \le \frac{1}{4} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k=0.$$

Khi đó (1) có dạng:

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2l\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Ta biến đổi:

$$\cos(\pi\cos 3x) = 1 \Leftrightarrow \pi\cos 3x = 2k\pi \Leftrightarrow \cos 3x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$|2k| \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le k \le \frac{1}{2} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k=0.$$

Khi đó (2) có dạng:

$$\cos 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + l\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{l\pi}{3},\ l \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

c. Ta biến đổi:

$$\cos(\pi\sin x) = 1 \Leftrightarrow \pi\sin x = 2k\pi \Leftrightarrow \sin x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$|2k| \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le k \le \frac{1}{2} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k=0.$$

Khi đó (1) có dạng:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = l\pi,\ l \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Bài tập 2.

a. Điều kiện $x \ne 0$.

Ta có:

$$\sin\frac{\pi}{x} = \cos(\pi x) \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{x} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} - \pi x + 2k\pi \\ \frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + \pi x + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x^2 - (4k+1)x + 2 = 0 & (1) \\ 2x^2 + (4k+1)x - 2 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

<u>*Giải (1)*</u>: Để có nghiệm điều kiện là:

$$\Delta_{(1)} \ge 0 \Leftrightarrow (4k+1)^2 - 16 \ge 0 \Leftrightarrow 16k^2 + 8k - 15 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \ge 3/4 \\ k \le -5/4 \end{array}\right. \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} k \ge 1 \\ k \le -2 \end{array}\right..$$

Khi đó (1) có nghiệm $x_{1,2} = \dfrac{4k+1 \pm \sqrt{16k^2+8k-15}}{4}$.

Giải (2): Để có nghiệm điều kiện là:

$\Delta_{(2)} \geq 0 \Leftrightarrow (4k+1)^2 + 16 \geq 0, \forall k.$

Do đó (2) có nghiệm $x_{3,4} = \dfrac{-4k-1 \pm \sqrt{16k^2+8k+15}}{4}$.

b. Phương trình tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}\cos(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{2}\cos(x-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} + 4k & (1) \\ \cos(x-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2} + 4k & (2) \end{array}\right., k \in Z.$$

- Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\left|\frac{1}{2} + 4k\right| \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq k \leq \frac{1}{8} \overset{k \in Z}{\Leftrightarrow} k = 0.$$

Khi đó (1) có dạng:

$$\cos(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2l\pi \\ x-\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{12} + 2l\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + 2l\pi \end{array}\right., l \in Z. \quad (3)$$

- Phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\left|-\frac{1}{2} + 4k\right| \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{8} \leq k \leq \frac{3}{8} \overset{k \in Z}{\Leftrightarrow} k = 0.$$

Khi đó (2) có dạng:

$$\cos(x-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi \\ x-\frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3} + 2l\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{11\pi}{12} + 2l\pi \\ x = -\frac{5\pi}{12} + 2l\pi \end{array}\right., l \in Z. (4)$$

Kết hợp (3) và (4), ta được:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{11\pi}{12} + l\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + l\pi \end{array}\right., l \in Z.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài tập 3. Giải các phương trình sau:

a. Điều kiện:

$$\cos[\frac{\pi}{4}(\cos x - \sin x)] \neq 0. \quad (*)$$

Phương trình tương đương với:

$$\frac{\pi}{4}(\cos x - \sin x) = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 1 + 4k, k \in Z. \quad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$|1 + 4k| \le \sqrt{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}+1}{4} \le k \le \frac{\sqrt{2}-1}{4} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k = 0.$$

Khi đó (1) có dạng:

$$\cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = -1 \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2l\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2l\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2l\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi \end{array}\right., l \in \mathbf{Z} \text{ thoả mãn } (*).$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Điều kiện:

$$\sin[\frac{\pi}{4}(\cos x + \sin x)] \ne 0. \qquad (**)$$

Phương trình tương đương với:

$$\frac{\pi}{4}(\cos x + \sin x) = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \cos x + \sin x = 1 + 4k, k \in \mathbf{Z}. \qquad (2)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$|1 + 4k| \le \sqrt{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}+1}{4} \le k \le \frac{\sqrt{2}-1}{4} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k = 0.$$

Khi đó (2) có dạng:

$$\cos x + \sin x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2l\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2l\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2l\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \end{array}\right., l \in \mathbf{Z} \text{ thoả mãn } (**).$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài tập 4. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$\frac{\pi}{8}(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}) = 2k\pi \Leftrightarrow \sqrt{9x^2 + 160x + 800} = 3x - 16k$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 16k \ge 0 \\ 9x^2 + 160x + 800 = (3x - 16k)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{16k}{3}, \ k \in Z \\ (3k + 5)x = 8k^2 - 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8k^2 - 25}{3k + 5} \ge \frac{16k}{3}, \ k \in Z \\ x = \frac{8k^2 - 25}{3k + 5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < -\frac{5}{3}, \ k \in Z & (1) \\ 9x = 24k - 40 - \frac{25}{3k + 5} & (2) \end{cases}$$

Muốn x nguyên thì trước hết từ (2) ta phải có:

$$\frac{25}{3k+5} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow 3k+5 \text{ là ước của } 25 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} 3k+5=-1 \\ 3k+5=-5 \\ 3k+5=-25 \end{array}\right. \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} k=-2 \\ k=-10 \end{array}\right.$$

- Với $k = -2$, ta được $x = -7$.
- Với $k = -10$, ta được $x = -31$.

Vậy, phương trình có hai nghiệm nguyên $x = -7$ và $x = -31$.

Bài tập 5. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$\left[\begin{array}{ll} -x^8+3x^4-2=0 & (1) \\ \begin{cases} -x^8+3x^4-2>0 & (2) \\ \sin[\pi(16x^2+2x)]=0 & (3) \end{cases} \end{array}\right.$$

- Giải (1) bằng cách đặt $t = x^4$, điều kiện $t \ge 0$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4=1 \\ x^4=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt[4]{2} \end{array}\right.$$

- Giải (2), dựa vào lời giải của (1) ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 1<t<2 \Leftrightarrow 1<x^4<2 \Leftrightarrow 1<|x|<\sqrt[4]{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt[4]{2}<x<-1 \\ 1<x<\sqrt[4]{2} \end{array}\right.$$

- Giải (3), ta có:

$$(3) \Leftrightarrow \pi(16x^2+2x)=k\pi \Leftrightarrow 16x^2+2x-k=0 \quad (4)$$

Phương trình (4) có nghiệm khi

$$\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 1+16k \ge 0 \Leftrightarrow k \ge -\frac{1}{16} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k \ge 0$$

Khi đó (4) có nghiệm $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+16k}}{16}$.

- Để nghiệm $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{1+16k}}{16}$ (≥ 0) thoả mãn (2) điều kiện là

$$1 < \frac{-1+\sqrt{1+16k}}{16} < \sqrt[4]{2} \Leftrightarrow 17 < \sqrt{1+16k} < 1+16\sqrt[4]{2}$$

$$\Leftrightarrow 18 < k < 16\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k = \{19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}.$$

- Để nghiệm $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{1+16k}}{16}$ (<0) thoả mãn (2) điều kiện là

$$-\sqrt[4]{2} < \frac{-1-\sqrt{1+16k}}{16} < -1 \Leftrightarrow 15 < \sqrt{1+16k} < 16\sqrt[4]{2}-1$$

$$\Leftrightarrow 14 < k < 16\sqrt{2}-2\sqrt[4]{2} \overset{k\in Z}{\Leftrightarrow} k = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm:

$$x = \{\pm 1, \pm\sqrt[4]{2}\} \cup \{x = \frac{-1+\sqrt{1+16k}}{16} \mid k = \overline{19,25}\} \cup \{x = \frac{-1-\sqrt{1+16k}}{16} \mid k = \overline{15,20}\}$$

Bài tập 6. Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 1-tg^2x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 1-tg^2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ tgx \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z}.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{a^2}{1-tg^2x} = \frac{\sin^2 x + a^2 - 2}{\cos^2 x - \sin^2 x} \Leftrightarrow \frac{a^2}{1-tg^2x} = \frac{tg^2x + (a^2-2)(1+tg^2x)}{1-tg^2x}$$

$$\Leftrightarrow (a^2-1)tg^2x = 2. \quad (1)$$

- Với $a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$, khi đó (1) vô nghiệm
- Với $a^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm 1$, khi đó (1) có dạng:

$$tg^2x = \frac{2}{a^2-1}. \quad (2)$$

Để (2) có nghiệm và thoả mãn điều kiện ta cần có:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{a^2-1} \geq 0 \\ \dfrac{2}{a^2-1} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| > 1 \\ a \neq \pm\sqrt{3} \end{cases}.$$

Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow tgx = \pm\, tg\alpha \Leftrightarrow x = \pm\,\alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Kết luận:

- Với $|a| \leq 1$ hoặc $a = \pm\sqrt{3}$, phương trình vô nghiệm.
- Với $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài tập 7. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 8. *Bạn đọc tự giải.*

CHỦ ĐỀ 2

MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Đặt hàm số lượng giác làm ẩn phụ và đặt điều kiện cho ẩn phụ nếu có (thí dụ với $t = \sin x$ hoặc $t = \cos x$, điều kiện $|t| \le 1$), rồi giải phương trình theo ẩn phụ này và tứ đó suy ngược lại nghiệm x.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1: Cho phương trình:

$$\cos^2x - (2m + 1)\cos x + m + 1 = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = \frac{3}{2}$.

❑ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. ❑ $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. ❑ Vô nghiệm.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

❑ $m \ge 0$. ❑ $|m| \le 1$. ❑ $0 \le m \le 1$. ❑ $-1 \le m \le 0$.

Bài tập 2: Cho phương trình:

$$5 - 4\sin^2x - 8\cos^2\frac{x}{2} = 3m.$$

a. Giải phương trình với $m = -\frac{4}{3}$.

❑ $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. ❑ $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. ❑ $x = \pm\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. Tìm m nguyên dương để phương trình có nghiệm.

❑ $m = -1, 0, 1$. ❑ $m = 0, 1, 2$. ❑ $m = 1, 2, 3$. ❑ $m = 2, 3, 4$.

Bài tập 3: Cho phương trình $\cos 2x + 5\sin x + m = 0$.

a. Giải phương trình với $m = 2$.

❑ $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. ❑ $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. ❑ Vô nghiệm.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

❑ $-4 \le m \le 6$. ❑ $-1 \le m \le 2$. ❑ $|m| \le 2$. ❑ $m \le ($

Bài tập 4: Cho phương trình:

$$4\cos^2x - 2(m-1)\cos x - m = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = \sqrt{3}$.

❑ $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \pm\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \pm\frac{3\pi}{4} + k\pi, x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

❑ $m \le 2$. ❑ $1 \le m \le 4$. ❑ $m \ge \sqrt{3}$. ❑ Mọi n.

Bài tập 5: Xác định m để phương trình:

$$m\cos 2x - 4(m-2)\cos x + 3(m-2) = 0$$

có đúng 2 nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

❑ $3 \le m < 4$. ❑ $1 < m \le 2$. ❑ $m = 0$. ❑ Vô nhiệm.

Bài tập 6: Giải và biện luận theo m phương trình:

$$(m-1)\sin^2x - 2(m+1)\cos x + 2m - 1 = 0.$$

Bài tập 7: Giải và biện luận theo a, b phương trình:

$$\cos ax + \cos 2bx - \cos[(a+2b)x] = 1.$$

Bài tập 8: Biện luận số nghiệm của phương trình:

$$\cos^2x + (1-m)\cos x + m - 1 = 0 \text{ với } 0 < x < \pi$$

tuỳ theo các giá trị của m.

Bài toán 2: Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx có dạng:

$$a\sin x + b\cos x = c. \quad (1)$$

Để giải phương trình (1) ta có thể lựa chọn một trong các cách sau

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Kiểm tra:

1. Nếu $a^2 + b^2 < c^2$ phương trình vô nghiệm.
2. Nếu $a^2 + b^2 \ge c^2$, khi đó để tìm nghiệm của phương trình (1) ta thực hiện tiếp bước 2.

Bước 2. Chia hai vế phương trình (1) cho $\sqrt{a^2+b^2}$, ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Vì $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 + (\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 = 1$ nên tồn tại góc β sao cho

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\beta .$$

Khi đó, phương trình (1) có dạng:

$$\sin x.\cos\beta + \sin\beta.\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\beta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Đây là phương trình cơ bản của hàm số sin.

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Với $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, kiểm tra vào phương trình

Bước 2. Với $\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi$, đặt $t = tg\frac{x}{2}$, suy ra

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ và } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Khi đó, phương trình (1) có dạng:

$$a.\frac{2t}{1+t^2} + b.\frac{1-t^2}{1+t^2} = c \Leftrightarrow (c+b)t^2 - 2at + c - b = 0.(2)$$

Bước 3. Giải phương trình (2) theo t.

Cách 3: Với những yêu cầu biện luận tính chất nghiệm của phương trình trong (α, β), ta có thể lựa chọn phương pháp điều kiện cần và đủ.

Nhận xét quan trọng:

1. Cách 1 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm, vô nghiệm hoặc giải và biện luận phương trình theo tham số.
2. Cách 2 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm thuộc tập D với $D \subset [0, 2\pi]$.
3. Cách 3 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu biện luận theo tham số để phương trình k có nghiệm thuộc tập D với $D \cap [0, 2\pi] \neq \varnothing$.
4. Từ cách giải 1 ta có được kết quả sau:

$$-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin x + b\cos x \le \sqrt{a^2+b^2}$$

kết quả đó gợi ý cho bài toán về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số dạng $y = a.\sin x + b.\cos x$, $y = \frac{a.\sin x + b.\cos x}{c.\sin x + d.\cos x}$ và phương pháp đánh giá cho một số phương trình lượng giác.

Dạng đặc biệt:

- $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$
- $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 9: Giải các phương trình sau:

a. $3\sin x - \sqrt{3}\cos 3x = 4\sin^3 x - 1$.

- ☐ $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. $\sqrt{3}\sin 4x - \cos 4x = \sin x - \sqrt{3}\cos x$.

- ☐ $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, x = \frac{3\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c. $2\sin x(\cos x - 1) = \sqrt{3}\cos 2x$.

- ☐ $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d. $2\sin 3x - \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 0$.

- ☐ Vô nghiệm.
- ☐ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{4\pi}{15} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{4\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 10: Giải các phương trình sau:

a. $\sqrt{3}\sin(x - \frac{\pi}{3}) + \sin(x + \frac{\pi}{6}) - 2\sin 1972x = 0$.

- ❑ $x = \frac{k\pi}{986}, x = \frac{\pi}{987} + \frac{k\pi}{987}, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{2k\pi}{1971}, x = \frac{\pi}{1973} + \frac{2k\pi}{1973}, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{k\pi}{987}, x = \frac{\pi}{988} + \frac{k\pi}{988}, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{2k\pi}{1973}, x = \frac{\pi}{1975} + \frac{2k\pi}{1975}, k \in \mathbf{Z}$.

b. $\sin x = \frac{1}{3}(3 - \sqrt{3}\cos x)$.

- ❑ $x = \alpha - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ với $\sin\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.
- ❑ $x = \alpha - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ với $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.
- ❑ $x = \alpha - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ với $\text{tg}\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.
- ❑ $x = \alpha - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ với $\text{cotg}\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Bài tập 11: Giải các phương trình sau:

a. $(1 + \sqrt{3})\sin x + (1 - \sqrt{3})\cos x = 2$.

- ❑ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. $\sin 2x + (\sqrt{3} - 2)\cos 2x = 1$.

- ❑ $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 12: Giải các phương trình sau:

a. $3\cos x - \sin 2x = \sqrt{3}(\cos 2x + \sin x)$.

- ❑ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. $\sqrt{2}\cos(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}) - \sqrt{6}\sin(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}) = 2\sin(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{3}) - 2\cos(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{6})$.

- ❑ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in Z$.
- ❑ $x = -\frac{10\pi}{3} + 5k\pi, k \in Z$.
- ❑ $x = \frac{10\pi}{3} + 5k\pi, k \in Z$

Bài tập 13: Cho phương trình:

$$(m - 1)\sin x - \cos x = 1.$$

a. Giải phương trình với m = 1.

- ❑ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

- ❑ $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.
- ❑ $[1, 3]$.
- ❑ $[0, 2]$.
- ❑ $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$.

Bài tập 14: Cho phương trình:

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = m.$$

a. Giải phương trình với m = −1.

- ❑ $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{4\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = \frac{4\pi}{3} + k\pi,, k \in \mathbf{Z}$.

b. Biện luận theo m số nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{6}, 2\pi]$ của phương trình.

Bài tập 15: Tìm m để phương trình:

$$m.\sin x + (m+1)\cos x + 1 = 0$$

có 2 nghiệm $x_1, x_2 \in [0, 2\pi]$ và 2 nghiệm này cách nhau $\frac{\pi}{2}$.

❑ $m = 0$. ❑ $m = \pm\frac{1}{2}$. ❑ $m = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. ❑ $m = -\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Bài tập 16: Giải và biện luận theo m phương trình:

$$\frac{a - b\cos x}{\sin x} = \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}\,\text{tg}y}{1 + \text{tg}^2 y}.$$

Bài tập 17: Giải và biện luận theo m phương trình:

$$m\sin x + (2m-1)\cos x = 3m - 1 \text{ với } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Bài toán 3: Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx có dạng:

$$a\sin^2 x + b\sin x.\cos x + c\cos^2 x = d. \qquad (1)$$

Để giải phương trình (1) ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1. Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó phương trình (1) có dạng $a = d$.

- Nếu $a = d$, thì (1) nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.
- Nếu $a \neq d$, thì (1) không nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

Bước 2. Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^2 x \neq 0$, ta được

$$a\text{tg}^2 x + b\text{tg}x + c = d(1 + \text{tg}^2 x)$$

Đặt $t = \text{tg}x$, phương trình có dạng:

$$(a - d)t^2 + bt + c - d = 0 \qquad (2)$$

Bước 3. Giải phương trình (2) theo t

Cách 2: Sử dụng các công thức:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \text{ và } \sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

ta được :

$$b.\sin 2x + (c - a)\cos 2x = d - c - a. \qquad (3)$$

Đây là phương trình bậc nhất của sin và cos.

Nhận xét quan trọng:

1. Cách 1 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm thuộc tập D.
2. Cách 2 thường được sử dụng với các bài toán yêu cầu giải phương trình và tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm, vô nghiệm hoặc giải và biện luận phương trình theo tham số.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 18: Giải các phương trình:

a. $4\sin^2x + 3\sqrt{3}\sin2x - 2\cos^2x = 4$.

❑ $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. $2\sin^2x + 3\cos^2x = 5\sin x.\cos x$.

❑ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, với $\text{tg}\alpha = \frac{3}{2}$.

❑ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, với $\text{cotg}\alpha = \frac{3}{2}$.

❑ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, với $\text{tg}\alpha = \frac{2}{3}$.

❑ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, với $\text{cotg}\alpha = \frac{2}{3}$.

Bài tập 19: Giải các phương trình:

a. $\sin^2x - 3\sin x.\cos x = 1$

❑ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, với $\text{tg}\alpha = \frac{1}{3}$.

❑ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, với $\text{cotg}\alpha = \frac{1}{3}$.

❑ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, với $\text{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$.

❑ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, với $\text{tg}\alpha = -3$.

b. $4\sin x + 6\cos x = \dfrac{1}{\cos x}$.

- ☐ $x = \pi + 2k\pi$ và $x = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, với $tg\alpha = -5$.
- ☐ $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, với $cotg\alpha = 5$.
- ☐ $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, với $tg\alpha = 5$.
- ☐ $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, với $tg\alpha = 5$.

Bài tập 20: Cho phương trình:

$$3\sin^2 x + m.\sin 2x - 4\cos^2 x = 0.$$

a. Giải phương trình khi m = 4.

- ☐ $x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm.

☐ $m = 4$. ☐ $m \geq 4$. ☐ $m \leq 4$. ☐ Mọi m.

Bài tập 21: Cho phương trình:

$$(m + 1)\sin^2 x - 2\sin x.\cos x + \cos 2x = 0.$$

a. Giải phương trình khi m = 0.

- ☐ $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, với $cotg\alpha = 2$.
- ☐ $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, với $cotg\alpha = \dfrac{1}{2}$.
- ☐ $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, với $tg\alpha = \dfrac{1}{2}$.

b. Xác định m để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc $(0, \dfrac{\pi}{2})$.

☐ $m > 2$. ☐ $0 < m < 1$. ☐ Mọi m. ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 22: Cho phương trình:

$$m.\sin^2 x - 3\sin x.\cos x - m - 1 = 0.$$

a. Giải phương trình với m = 1.

- ☐ $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, với $cotg\alpha = 2$.
- ☐ $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, với $tg\alpha = 2$.
- ☐ Vô nghiệm.

b. Tìm m để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $(0, \frac{3\pi}{2})$.

❑ $m > 2$. ❑ $m < -1$. ❑ $-1 < m < 2$. ❑ Vô nghiệm.

Bài tập 23: Cho phương trình:

$$m.\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}, \text{ với } m \neq 0.$$

a. Giải phương trình khi $m = \sqrt{3}$.

❑ $x = 2k\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$. ❑ $x = k\pi, x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z$.

❑ $x = 2k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$. ❑ $x = k\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z$.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm.

❑ $m \leq \sqrt{3}$. ❑ $m \geq \sqrt{3}$. ❑ $m > 1$. ❑ Mọi m.

c. Giả sử m là giá trị làm cho phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 + x_2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Tính $\cos 2(x_1 + x_2)$ theo m.

❑ $\sqrt{3} + m$. ❑ $\sqrt{3} - m$. ❑ $m^2 + 1$. ❑ $\frac{1-m^2}{1+m^2}$.

Bài tập 24: Giải và biện luận phương trình:

$$\cos^2 x + 8\sin x.\cos x + 7\sin^2 x = m$$

Bài tập 25: Giải và biện luận phương trình:

$$(m^2 + 2)\cos^2 x - 2m.\sin 2x + 1 = 0.$$

Bài toán 4: Phương trình đối xứng đối với sinx và cosx.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Phương trình đối xứng đối với sinx và cosx có dạng:

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin x.\cos x + c = 0 \quad (1)$$

$$\text{hoặc } a(\sin x - \cos x) + b\sin x.\cos x + c = 0. \quad (2)$$

Để giải phương trình (1) ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Đặt $\sin x + \cos x = t$, điều kiện $|t| \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$at + b\frac{t^2-1}{2} + c = 0 \Leftrightarrow bt^2 + 2at + 2c - b = 0. \quad (2)$$

Bước 2. Giải (2) theo t và chọn nghiệm t_0 thoả mãn điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$

Với $t = t_0$, ta được:

$$\sin x + \cos x = t_0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = t_0 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{t_0}{\sqrt{2}}.$$

Đây là phương trình cơ bản của hàm số sin.

Chú ý:

1. Ta có thể giải (1) bằng cách đặt ẩn phụ $z = \frac{\pi}{4} - x$, khi đó ta có:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - x) = \sqrt{2}\cos z$$

$$\sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\sin 2(\frac{\pi}{4} - z) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2} - 2z)$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2z = \frac{1}{2}(2\cos^2 z - 1)$$

Khi đó, phương trình ban đầu được đưa về dạng phương trình bậc 2 đối với cosz.

2. Phương trình (2) được giải tương tự như (1) với ẩn phụ:

$$t = \sin x - \cos x, \text{ điều kiện } |t| \le \sqrt{2} \Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{1 - t^2}{2}.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 26: Giải các phương trình sau:

a. $12(\sin x - \cos x) - 2\sin x\cos x - 12 = 0$.

❑ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. ❑ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

❑ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. ❑ $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. $(1 + \cos x)(1 + \sin x) = 2$.

❑ $x = 2k\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. ❑ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

❑ $x = k\pi, x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. ❑ $x = k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 27: Giải các phương trình sau:

a. $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = 1$.

❑ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. ❑ $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

❑ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. ❑ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. $|\sin x + \cos x| - \sin 2x = 1$.

❑ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. ❑ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

❑ $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. ❑ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 28: Tìm m để phương trình:

$$3(\sin x + \cos x) = 4m\sin x.\cos x$$

có nghiệm thuộc $(0, \frac{3\pi}{4})$.

- ❑ $m \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.
- ❑ $m \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$.
- ❑ $m \in (-\infty, 0) \cup [\frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty)$.
- ❑ $m \in (-\infty, 0) \cup (\frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty)$.

Bài tập 29: Cho phương trình

$$(1 - \cos x)(1 - \sin x) = m$$

a. Giải phương trình với m = 2.

- ❑ $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. Tìm m để phương trình có đúng 1 nghiệm thuộc $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- ❑ $0 \le m \le 1$.
- ❑ $1 \le m \le 2$.
- ❑ $0 \le m \le \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}$.
- ❑ $1 \le m \le \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$.

Bài tập 30: Cho phương trình

$$m(\sin x + \cos x) + \sin x\cos x + 1 = 0.$$

a. Giải phương trình với m = 0.

- ❑ $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ Vô nghiệm.

b. Tìm m để phương trình có đúng 1 nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, 0]$.

- ❑ $|m| \ge 1$.
- ❑ $|m| \le 2$.
- ❑ $1 \le m \le 2$.
- ❑ $-2 \le n \le -1$.

Bài tập 31: Cho phương trình

$$m(\sin x + \cos x) + \sin 2x = 0.$$

a. Giải phương trình với m = 0.

- ❑ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. Tìm m để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc $[0, \pi]$.

□ $0 \le m \le 1$. □ $-1 \le m \le 0$. □ $0 \le m \le \sqrt{2}$. □ $-\sqrt{2} \le m \le 0$.

Bài tập 32: Giải và biện luận theo k phương trình

$$\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = k.$$

Bài tập 33: Cho phương trình

$$m(\sin x - \cos x) + 2\sin x\cos x = m.$$

a. Giải phương trình với $m = 1 + \sqrt{2}$.

□ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

□ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

□ $x = \pi + 2k\pi, x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

□ $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, x = \pi + 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. Tìm m để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc $[0, \pi]$.

□ $m \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \cup \{1\}$.

□ $m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \cup \{0\}$.

□ $m \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty) \cup \{1 \pm \sqrt{2}\}$.

□ $m \in (-\infty, 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, +\infty) \cup \{2\}$.

Bài tập 34: Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m.$$

□ $1 - 4\sqrt{2} \le m \le 1 + 4\sqrt{2}$. □ $-4\sqrt{2} \le m \le 4\sqrt{2}$.

□ $4\sqrt{2} - 1 \le m \le 4\sqrt{2} + 1$. □ $-1 - 4\sqrt{2} \le m \le 1 - 4\sqrt{2}$.

Bài toán 5: Loại nghiệm không thích hợp của phương trình lượng giác.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thường gặp 2 dạng toán sau:

Dạng 1: Tìm nghiệm thuộc (a, b) của phương trình.

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình.

Bước 2: Giải phương trình để tìm nghiệm $x = \alpha + \frac{2k\pi}{n}$, k, n $\in \mathbf{Z}$.

Bước 3: Tìm nghiệm thuộc (a, b):

$$a < \alpha + \frac{2k\pi}{n} < b \overset{k,n\in Z}{\Leftrightarrow} (k_0, l_0) \Rightarrow x_0 = \alpha + \frac{2k_0\pi}{n_0}.$$

Dạng 2: Phương trình chứa ẩn ở mẫu.

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình $x \neq \beta + \frac{2l\pi}{n}$, $l, n \in \mathbb{Z}$

Bước 2: Giải phương trình để tìm nghiệm $x_0 = \alpha + \frac{2k\pi}{n}$, $k, n \in \mathbb{Z}$

Bước 3: Kiểm tra điều kiện ta lựa chọn một trong hai phương pháp sau:

Phương pháp đại số:

- Nghiệm x_0 bị loại khi và chỉ khi:

$$\alpha + \frac{2k\pi}{n} = \beta + \frac{2l\pi}{n}.$$

- Nghiệm x_0 chấp nhận được khi và chỉ khi:

$$\alpha + \frac{2k\pi}{n} \neq \beta + \frac{2l\pi}{n}.$$

Phương pháp hình học:

- Biểu diễn các điểm $x = \beta + \frac{2l\pi}{n}$, $l, n \in \mathbb{Z}$ trên đường tròn đơn vị, khi đó ta được tập các điểm $C = \{C_1, ..., C_p\}$.
- Biểu diễn các điểm $x = \alpha + \frac{2k\pi}{n}$, $k, n \in \mathbb{Z}$ trên đường tròn đơn vị, khi đó ta được tập các điểm $D = \{D_1, ..., D_q\}$.
- Lấy tập $E = D \backslash C = \{E_1, ..., E_r\}$, từ đó kết luận nghiệm của phương trình là:

$$x = E_1 + 2k\pi, ... \; x = E_r + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 35: Giải các phương trình sau:

a. $\frac{1 - \cos 4x}{2\sin 2x} = \frac{\sin 4x}{1 + \cos 4x}$.

- ☐ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ Vô nghiệm.

b. $\frac{\cot g^2 x - tg^2 x}{\cos 2x} = 16(1 + \cos 4x)$.

- ☐ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 36: Giải các phương trình sau:

a. $6\sin x - 2\cos^3 x = \dfrac{5\sin 4x.\cos x}{2\cos 2x}$.

❑ $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. ❑ $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$. ❑ Vô nghiệm.

b. $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin 2x} = \dfrac{1}{2}(\text{tg}x + \text{cotg}x)$.

❑ $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$. ❑ $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. ❑ Vô nghiệm.

Bài tập 37: Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \sqrt{3}$.

❑ $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi, x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi, x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. $\dfrac{1 + 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x.\cos x - 1} = 1$.

❑ $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. ❑ $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. ❑ $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 38: Giải các phương trình sau:

a. $2(\sin 3x - \cos 3x) = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$.

❑ $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi, x = k\pi, x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi, x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi, x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi, x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

b. $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\cos x - \sin x} = \cos 2x.$

❑ $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, x = k\pi, k \in \mathbf{Z}.$ ❑ $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

❑ $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi, x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$ ❑ $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

Bài tập 39: Giải các phương trình sau:

a. $2\sqrt{2}\sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}.$

❑ $x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$ ❑ $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

❑ $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$ ❑ $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

b. $\dfrac{\sin^4 \dfrac{x}{2} + \cos^4 \dfrac{x}{2}}{1 - \sin x} - tg^2x.\sin x = \dfrac{1}{2}(1 + \sin x) + tg^2x.$

❑ $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$ ❑ $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

❑ $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$ ❑ $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

Bài tập 40: Giải các phương trình sau:

a. $\dfrac{3(\cot g2x + \cos 2x)}{\cot g2x - \cos 2x} - 2\sin 2x = 2.$

❑ $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

❑ $x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi, x = -\dfrac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

❑ $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi, x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

❑ $x = -\dfrac{\pi}{8} + k\pi, x = -\dfrac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

b. $\dfrac{1}{tgx + \cot g2x} = \dfrac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\cot gx - 1}.$

❑ $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$ ❑ $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

❑ $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$ ❑ $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

Bài tập 41: Giải các phương trình sau:

a. $\sin^4x + \cos^4x = \frac{7}{8}\text{cotg}(x + \frac{\pi}{3}).\text{cotg}(\frac{\pi}{6} - x)$.

❑ $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. ❑ $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$. ❑ $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

b. $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$.

❑ $x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 42: Giải các phương trình sau:

a. $3\text{tg}3x + \text{cotg}2x = 2\text{tg}x + \frac{2}{\sin 4x}$.

❑ $x = \pm\alpha + k\pi, k \in Z$ với $\cos 2\alpha = \frac{1}{4}$.

❑ $x = \pm\alpha + k\pi, k \in Z$ với $\cos 2\alpha = -\frac{1}{4}$.

❑ $x = \alpha + k\pi, x = \pi - \alpha + k\pi, k \in Z$ với $\sin 2\alpha = \frac{1}{4}$.

❑ $x = \alpha + k\pi, x = \pi - \alpha + k\pi, k \in Z$ với $\sin 2\alpha = -\frac{1}{4}$.

b. $\sin^2x - \sin x + \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x} = 0$.

❑ $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$. ❑ $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. ❑ $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 43: Tìm các nghiệm của phương trình

$$\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 1 - \sin x$$

thoả mãn điều kiện $\left|\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right| \le \frac{3\pi}{4}$.

Bài tập 44: Tìm các nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 7x) - \cos^2 2x + \sin^2 3x = 0$$

thoả mãn điều kiện $|x| < 2$.

Bài tập 45: Tìm các nghiệm của phương trình

$$\frac{3\pi}{4}\sin(2x + \frac{5\pi}{2}) - 3\cos(x - \frac{7\pi}{2}) = 1 + 2\sin x$$

thoả mãn điều kiện $x \in (\frac{\pi}{2}, 3\pi)$.

Bài tập 46: Tìm tổng các nghiệm thoả mãn $1 \le x \le 70$ của phương trình:

$$\cos 2x - tg^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}.$$

□ 70π. □ 363π. □ 423π. □ 800π.

II. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Đặt $t = \cos x$, điều kiện $|t| \le 1$. Khi đó, phương trình có dạng:

$$t^2 - (2m+1)t + m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \cos x = m \ \ (*) \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

a. Với $m = \frac{3}{2}$ thì phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy, với $m = \frac{3}{2}$ phương trình có hai họ nghiệm $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. Để phương trình có nghiệm thuộc $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ điều kiện là:

(*) có nghiệm thuộc $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \Leftrightarrow -1 \le m \le 0$.

Vậy, với $-1 \le m \le 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 2. Biến đổi phương trình về dạng:

$$5 - 4(1 - \cos^2 x) - 4(1 + \cos x) = 3m \Leftrightarrow 4\cos^2 x - 4\cos x - 3m - 3 = 0.$$

Đặt $t = \cos x$, điều kiện $|t| \le 1$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$f(t) = 4t^2 - 4t - 3m - 3 = 0. \quad (1)$$

a. Với $m = -\frac{4}{3}$, phương trình có dạng:

$$4t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, với $m = -\frac{4}{3}$, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Phương trình có nghiệm:

$$\Leftrightarrow \text{(1) có nghiệm thuộc } [-1,1] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{(1) có 1 nghiệm thuộc } [-1,1]\\ \text{(1) có 2 nghiệm thuộc } [-1,1]\end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-1).f(1) \le 0\\ \begin{cases}\Delta' \ge 0\\ af(-1) \ge 0\\ af(1) \ge 0\\ -1 \le \dfrac{S}{2} \le 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(5-3m)(-3-3m) \le 0\\ \begin{cases}16+12m \ge 0\\ 5-3m \ge 0\\ -3-3m \ge 0\\ -1 \le \dfrac{1}{2} \le 1\end{cases}\end{array}\right. \overset{m\in Z^+}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=0\\ m=1\end{array}\right..$$

Vậy, với $m = \pm 1$ hoặc $m = 0$ phương trình có nghiệm.

Bài tập 3. Biến đổi phương trình về dạng:

$$1 - 2\sin^2x + 5\sin x + m = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2x - 5\sin x - m - 1 = 0.$$

Đặt $t = \sin x$, điều kiện $|t| \le 1$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$f(t) = 2t^2 - 5t - m - 1 = 0. \qquad (1)$$

a. Với $m = 2$, phương trình có dạng:

$$2t^2 - 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=\dfrac{3}{2} \text{ loại}\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z.$$

Vậy, với $m = 2$, phương trình có một họ nghiệm.

b. Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm thuộc $[-1, 1]$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{(1) có 1 nghiệm thuộc } [-1,1]\\ \text{(1) có 2 nghiệm thuộc } [-1,1] \text{ (loại vì } \dfrac{S}{2} = \dfrac{5}{4})\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow f(-1).f(1) \le 0 \Leftrightarrow (6-m)(-4-m) \le 0 \Leftrightarrow -4 \le m \le 6.$$

Vậy, với $-4 \le m \le 6$ phương trình có nghiệm.

Bài tập 4. Đặt $t = \cos x$, điều kiện $|t| \le 1$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$f(t) = 4t^2 - 2(m-1)t - m = 0. \qquad (1)$$

a. Với $m = \sqrt{3}$, phương trình có dạng:

$$4t^2 - 2(\sqrt{3} - 1)t - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-\dfrac{1}{2}\\ t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-\dfrac{1}{2}\\ \cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy, với $m = \sqrt{3}$, phương trình có bốn họ nghiệm.

b. Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm thuộc $[-1, 1]$

$$\left[\begin{array}{l}(1)\text{ có 1 nghiệm thuộc }[-1,1]\\(1)\text{ có 2 nghiệm thuộc }[-1,1]\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(-1).f(1)\le 0\\ \begin{cases}\Delta'\ge 0\\ af(-1)\ge 0\\ af(1)\ge 0\\ -1\le\dfrac{S}{2}\le 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(m+2)(6-3m)\le 0\\ \begin{cases}m^2+2m+1\ge 0\\ m+2\ge 0\\ 6-3m\ge 0\\ -1\le\dfrac{m-1}{4}\le 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \text{mọi m.}$$

Vậy, với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Bài tập 5. Biến đổi phương trình về dạng:

$$m(2\cos^2x - 1) - 4(m - 2)\cos x + 3(m - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow m\cos^2x - 2(m - 2)\cos x + m - 2 = 0.$$

Đặt $t = \cos x$, điều kiện $|t| \le 1$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$f(t) = mt^2 - 2(m - 2)t + m - 2 = 0. \quad (1)$$

Để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ điều kiện là:

(1) có đúng một nghiệm thuộc $(0, 1)$

$\Leftrightarrow$ *Bạn đọc tự làm tiếp* $\Leftrightarrow 3 \le m < 4$.

Vậy, với $3 \le m < 4$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 6. Biến đổi phương trình về dạng:

$$(m - 1)(1 - \cos^2x) - 2(m+1)\cos x + 2m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)\cos^2x + 2(m + 1)\cos x - 3m + 2 = 0.$$

Đặt $t = \cos x$, điều kiện $|t| \le 1$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$(m - 1)t^2 + 2(m + 1)t - 3m + 2 = 0. \quad (2)$$

Ta đi xác định các giá trị:

$$\Delta' = (m + 1)^2 + (3m - 2)(m - 1) = 4m^2 - 3m + 3,$$

$$af(-1) = (m - 1)(-4m - 1),\ af(1) = 3(m - 1),$$

$$\frac{S}{2} - 1 = -\frac{m+1}{m-1} - 1 = -\frac{2m}{m-1},$$

$$\frac{S}{2} + 1 = -\frac{m+1}{m-1} + 1 = -\frac{2}{m-1}.$$

Ta có bảng tổng kết sau:

m	Δ'	af(-1)	af(1)	$\frac{S}{2}-1$	$\frac{S}{2}+1$	So sánh các nghiệm với ± 1
$-\infty$						$t_1<-1<1<t_2$
	+	-	-	-	-	
-1/4		0				$t_1=-1$
	+	+	-	-	-	
0				0		$-1<t_1<1<t_2$
	+	+	-	+	-	
1		0	0	‖	‖	$t=1/4$
	+	-	+	-	+	$t_1<-1<t_2<1$
$+\infty$						

Vậy:

- Với $m < -\frac{1}{4}$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m = -\frac{1}{4}$, phương trình có nghiệm $t_1 = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in Z$.
- Với $-\frac{1}{4} < m < 1$, phương trình có nghiệm:

$$t_1 = \frac{-m-1-\sqrt{4m^2-3m+3}}{m-1} \Leftrightarrow \cos x = t_1 = \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\alpha + 2k\pi, k \in Z.$$

- Với $m = 1$, phương trình có nghiệm

$$t = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{4} = \cos\beta \Leftrightarrow x = \pm\beta + 2k\pi, k \in Z.$$

- Với $m > 1$, phương trình có nghiệm

$$t_2 = \frac{-m-1+\sqrt{4m^2-3m+3}}{m-1} \Leftrightarrow \cos x = t_2 = \cos\gamma$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\gamma + 2k\pi, k \in Z.$$

Bài tập 7. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 8. Ta có kết luận:

- Với $m \le \frac{1}{2}$ phương trình có một nghiệm thuộc khoảng $(0, \pi)$.
- Với $\frac{1}{2} < m < 1$ phương trình có hai nghiệm thuộc khoảng $(0, \pi)$.
- Với $m = 1$ phương trình có một nghiệm $x = \frac{\pi}{2}$.
- Với $m > 1$ phương trình vô nghiệm.

Bài tập 9.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$3\sin x - 4\sin^3 x - \sqrt{3}\cos 3x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x.\cos\frac{\pi}{3} - \cos 3x.\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 3x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \\ x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x - \frac{1}{2}\cos 4x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \Leftrightarrow \sin(4x - \frac{\pi}{6}) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x - \frac{\pi}{6} = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 4x - \frac{\pi}{6} = \pi - x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \\ x = \frac{3\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

c. Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin x.\cos x - 2\sin x = \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 2\sin x$$

$$\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \sin x \Leftrightarrow \sin 2x.\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2x.\sin\frac{\pi}{3} = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{3} = x + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - x + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

d. Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin 3x = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \sin 3x = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = \sin 2x.\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2x.\sin\frac{\pi}{3} = \sin x \Leftrightarrow \sin 3x = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 2x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 3x = \pi - 2x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{4\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài tập 10.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sqrt{3}\sin(x-\frac{\pi}{3})+\cos(x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2})-2\sin 1972x=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin(x-\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})=2\sin 1972x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x-\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}\cos(x-\frac{\pi}{3})=\sin 1972x \Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=\sin 1972x$$

$$\Leftrightarrow \sin 1972x=\sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1972x=x+2k\pi\\1972x=\pi-x+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2k\pi}{1971}\\x=\dfrac{\pi}{1973}+\dfrac{2k\pi}{1973}\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$3\sin x+\sqrt{3}\cos x=1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos\frac{\pi}{6}+\cos x.\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin(x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\dfrac{\pi}{6}=\alpha+2k\pi\\x+\dfrac{\pi}{6}=\pi-\alpha+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\alpha-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\\x=\dfrac{5\pi}{6}-\alpha+2k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài tập 11.

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sin x+\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Đặt $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\cos\alpha$ thì $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\sin\alpha$, khi đó ta được:

$$\sin x.\cos\alpha+\cos x.\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha)=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\alpha=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\\x+\alpha=\pi-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}-\alpha+2k\pi\\x=\dfrac{3\pi}{4}-\alpha+2k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin x + \cos x) + \sqrt{3}(\sin x - \cos x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{6}\cos(x + \frac{\pi}{4}) = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}).\cos\frac{\pi}{3} - \cos(x + \frac{\pi}{4}).\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{12}) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương pháp giải cho phương trình dạng $a.\sin 2x + b\cos 2x = c$

– Đề nghị bạn đọc tự làm.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sqrt{3} - 2)\cos 2x = 1 - \sin 2x \Leftrightarrow (\sqrt{3} - 2)(\cos^2 x - \sin^2 x) = (\cos x - \sin x)^2$$

$$\Leftrightarrow [(\sqrt{3} - 2)(\cos x + \sin x) - (\cos x - \sin x)](\cos x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\sqrt{3} - 3)\cos x = (1 - \sqrt{3})\sin x \\ \cos x = \sin x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = -\sqrt{3} \\ tgx = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài tập 12.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$3\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos(x + \frac{\pi}{6}) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos(x + \frac{\pi}{6}) = 2\sin(x + \frac{\pi}{6}).\cos(x + \frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos(x + \frac{\pi}{6}) = 0 \\ \sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

b. Sử dụng phép biến đổi từng phần:

$$\cos(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}) - \sqrt{3}\sin(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}) =$$

$$= 2[\frac{1}{2}\cos(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12})]$$

$$= 2\sin(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{5} + \frac{\pi}{12}) = 2\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{5}) = 2\sin[\pi - (\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{3})]$$

$$= 2\sin(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{3}) = 2\sin(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}) = 2\cos(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{6}).$$

Từ đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$2\sqrt{2}\sin(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{3}) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{10\pi}{3} + 5k\pi, k \in Z.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Bài tập 13. Xét hai trường hợp:

- Với $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, thay vào phương trình ta được:

$$(m-1)\sin(\pi + 2k\pi) - \cos(\pi + 2k\pi) = 1 \text{ luôn đúng}$$

Vậy $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ là một họ nghiệm của phương trình.

- Với $\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Đặt $t = tg\frac{x}{2}$, suy ra $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ và $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$\frac{2(m-1)t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \Leftrightarrow 2(m-1)t - 1 + t^2 = 1 + t^2 \Leftrightarrow (m-1)t = 1. \quad (2)$$

a. Với $m = 1$ ta thấy ngay phương trình chỉ có một họ nghiệm $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

b. Với $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ thì $t \in [-1, 1]$.

Do vạy, để phương trình có nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ điều kiện là phương trình (2) có nghiệm thuộc $[-1, 1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ -1 \leq \frac{1}{m-1} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq 0 \end{array}\right..$$

Vậy, với $m \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 14.

a. Với m = −1, phương trình có dạng:

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy, với m = −1 phương trình có hai họ nghiệm.

b. Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đường thẳng y = m với phần đồ thị hàm số $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ trên $D = (-\frac{\pi}{6}, 2\pi]$.

Từ đó, ta có kết luận:

- Với $|m| > 2$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m = \pm 2$, phương trình có 1 nghiệm thuộc D.
- Với $-2 < m \le 0$ hoặc $1 < m < 2$, phương trình có 2 nghiệm thuộc D.
- Với $0 < m \le 1$, phương trình có 3 nghiệm thuộc D.

Bài tập 15. Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ như sau:

Điều kiện cần: Giả sử phương trình có nghiệm $x = \alpha \in [0, \frac{3\pi}{2}]$, khi đó $x = \alpha + \frac{\pi}{2}$ cũng là nghiệm, như vậy:

$$\begin{cases} m.\sin\alpha + (m+1).\cos\alpha + 1 = 0 \\ m.\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) + (m+1).\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m.\sin\alpha + (m+1).\cos\alpha + 1 = 0 \\ m.\cos\alpha - (m+1).\sin\alpha + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m.(\sin\alpha + \cos\alpha) = -1 - \cos\alpha \\ m(\cos\alpha - \sin\alpha) = \sin\alpha - 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{1 - \sin\alpha}$$

$$\Leftrightarrow (\sin\alpha + \cos\alpha)(1 - \sin\alpha) = (\cos\alpha - \sin\alpha)((1 + \cos\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ hoặc } \alpha = \frac{5\pi}{6}.$$

- Với $\alpha = \frac{\pi}{6}$, thay vào phương trình ta được:

$$m.\sin\frac{\pi}{6} + (m+1).\cos\frac{\pi}{6} + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

- Với $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, thay vào phương trình ta được:

$$m.\sin\frac{5\pi}{6} + (m + 1).\cos\frac{5\pi}{6} + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1-\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy với $m = -\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ là điều kiện cần.

Điều kiện đủ – Đề nghị bạn đọc tự làm.

Bài tập 16. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 17. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 18.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$2(1 - \cos2x) + 3\sqrt{3}\sin2x - (1 + \cos2x) = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin2x - \cos2x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x - \frac{1}{2}\cos2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

b. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, với $\text{tg}\alpha = \frac{3}{2}$.

Bài tập 19.

a. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, với $\text{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$.

b. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, với $\text{tg}\alpha = 5$.

Bài tập 20. Nhận xét rằng $\cos x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$, ta được:

$$3\text{tg}^2x + 2m.\text{tg}x - 1 = 0.$$

Đặt $t = \text{tg}x$, phương trình có dạng:

$$3t^2 + 2mt - 1 = 0. \quad (2)$$

a. Với $m = 0$, ta được:

$$3t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \text{tg}x = \pm\text{tg}\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, với $m = 0$ phương trình có hai họ nghiệm.

b. Để phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 3 \geq 0$, luôn đúng.

Vậy, với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Bài tập 21. Biến đổi phương trình về dạng:

$$(m + 1)\sin^2x - 2\sin x.\cos x + 1 - 2\sin^2x = 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)\sin^2x - 2\sin x.\cos x + 1 = 0.$$

Xét hai trường hợp:

- Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$m - 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

- Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2x \neq 0$, ta được:

$$(m - 1)tg^2x - 2tgx + 1 + tg^2x = 0 \Leftrightarrow mtg^2x - 2tgx + 1 = 0.$$

Đặt $t = tgx$, phương trình có dạng:

$$f(t) = mt^2 - 2t + 1 = 0 \qquad (1)$$

a. Với $m = 0$, phương trình (1) có dạng:

$$-2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow tgx = \frac{1}{2} = tg\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in Z.$$

Vậy, với $m = 0$ phương trình có hai họ nghiệm.

b. Để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt thoả mãn $0 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ af(0) > 0 \\ \frac{S}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ 1 > 0 \\ \frac{1}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Vậy, với $0 < m < 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 22. Nhận xét rằng phương trình không nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2x \neq 0$, ta được:

$$m.tg^2x - 3tgx - (m + 1)(1 + tg^2x) = 0 \Leftrightarrow tg^2x + 3tgx + m + 1 = 0.$$

Đặt $t = tgx$, phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 + 3t + m + 1 = 0 \qquad (1)$$

a. Với $m = 1$, phương trình có dạng:

$$t^2 + 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = -1 \\ tgx = -2 = tg\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{array}\right. k \in Z.$$

Vậy, với m=1 phương trình có hai họ nghiệm.

b. Để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $(0, \frac{3\pi}{2})$

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt thoả mãn $t_1 < 0 < t_2$

$\Leftrightarrow af(0) < 0 \Leftrightarrow m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$.

Vậy, với $m < -1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 23. Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$m\sin x.\cos x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow m\sin x.\cos x = \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ m.\cos x = \sin x \end{array}\right. \overset{\cos x \neq 0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ tgx = m \end{array}\right. . \qquad (I)$$

a. Với $m = \sqrt{3}$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ tgx = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy, với $m = \sqrt{3}$ phương trình có hai họ nghiệm.

b. Từ (I) ta có ngay nhận xét phương trình (1) có nghiệm với mọi m.

c. Vì $x_1 + x_2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, do đó có thể coi:

- x_1 là nghiệm của phương trình $\sin x = 0 \Rightarrow tgx_1 = 0$.
- x_2 là nghiệm của phương trình $tgx = m \Rightarrow tgx_2 = m$.

suy ra:

$$\cos 2(x_1 + x_2) = \cos 2x_1.\cos 2x_2 - \sin 2x_1.\sin 2x_2$$

$$= \frac{1 - tg^2 x_1}{1 + tg^2 x_1}.\frac{1 - tg^2 x_2}{1 + tg^2 x_2} - \frac{2tgx_1}{1 + tg^2 x_1}.\frac{2tgx_2}{1 + tg^2 x_2} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}.$$

Cách 2: Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos x \neq 0$, ta được

$$mtgx + 1 = 1 + tg^2 x \Leftrightarrow tg^2 x - mtgx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = 0 \\ tgx = m \end{array}\right. . \qquad (II)$$

a. Với $m = \sqrt{3}$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = 0 \\ tgx = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, với $m = \sqrt{3}$ phương trình có hai họ nghiệm.

b. Từ (I) ta có ngay nhận xét phương trình (1) có nghiệm với mọi m

c. Vì $x_1 + x_2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, do đó có thể coi:

- x_1 là nghiệm của phương trình $tgx = 0 \Rightarrow tgx_1 = 0$
- x_2 là nghiệm của phương trình $tgx = m \Rightarrow tgx_2 = m$

suy ra $\cos 2(x_1 + x_2) = \frac{1-m^2}{1+m^2}$.

Bài tập 24. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 25. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 26.

a. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 27.

a. Đặt $|\sin x - \cos x| = t$, điều kiện $0 \le t \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t + 4(1 - t^2) = 1 \Leftrightarrow 4t^2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{3}{4} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow |\sin x - \cos x| = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

b. Đặt $|\sin x + \cos x| = t$, điều kiện $0 \le t \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t - (t^2 - 1) = 1 \Leftrightarrow t^2 - t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sin 2x = -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = k\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài tập 28. Đặt $t = \sin x + \cos x$ điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$3t = 2m(t^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow f(t) = 2mt^2 - 3t - 2m = 0. \quad (1)$$

Với $x \in (0, \frac{3\pi}{4})$ thì điều kiện $0 < t \le \sqrt{2}$ bởi phép biến đổi:

$$0 < x < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \pi \Leftrightarrow 0 < \sin(x + \frac{\pi}{4}) \le 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \le \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 < t \le \sqrt{2}.$$

Để phương trình có nghiệm thuộc $(0, \frac{3\pi}{4})$ điều kiện là

$$(1) \text{ có nghiệm thuộc } (0, \sqrt{2}] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (1) \text{ có 1 nghiệm thuộc } (0, \sqrt{2}] \\ (1) \text{ có 2 nghiệm thuộc } (0, \sqrt{2}] \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(0).f(\sqrt{2}) \le 0 \text{ thử lại} \\ \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ af(0) \ge 0 \\ af(\sqrt{2}) \ge 0 \\ 0 \le \frac{S}{2} \le \sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m \ge \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{array}\right..$$

Vậy, với $m \in (-\infty, 0) \cup [\frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 29. Viết lại phương trình dưới dạng:

$\sin x + \cos x - \sin x.\cos x + m - 1 = 0.$

Đặt $\sin x + \cos x = t$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t - \frac{t^2 - 1}{2} + m - 1 = 0 \Leftrightarrow f(t) = t^2 - 2t - 2m + 1 = 0. \quad (1)$$

a. Với m = 2 phương trình có dạng:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 3 \text{ (l)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, với m = 2 phương trình có hai họ nghiệm.

b. Với $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ thì điều kiện $1 \le t \le \sqrt{2}$ bởi phép biến đổi:

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \le x + \frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin(x + \frac{\pi}{4}) \le 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \le \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \le \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 \le t \le \sqrt{2}.$$

Để phương trình có đúng một nghiệm thuộc $[0, \frac{\pi}{2}]$ điều kiện là:

(1) có đúng một nghiệm thuộc $[1, \sqrt{2}]$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1).f(\sqrt{2}) \le 0 \text{ thử lại} \\ \begin{cases} 1 \le -\frac{b}{2a} \le \sqrt{2} \\ \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 \le m \le \frac{3-2\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy, với $0 \le m \le \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 30. Đặt sinx + cosx = t, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra sinx.cosx = $\frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$mt + \frac{t^2-1}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow f(t) = t^2 + 2mt + 1 = 0. \quad (1)$$

a. Với m = 0 phương trình có dạng:

$t^2 + 1 = 0$ vô nghiệm.

Vậy, với m = 0 phương trình vô nghiệm.

b. Với $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ thì điều kiện $-1 \le t \le 1$ bởi phép biến đổi:

$$-\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \le x + \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin(x + \frac{\pi}{4}) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow -1 \le \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \le 1 \Leftrightarrow -1 \le t \le 1.$$

Để phương trình có đúng một nghiệm thuộc $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ điều kiện là:

(1) có đúng một nghiệm thuộc $[-1, 1]$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-1).f(1) \le 0 \text{ thử lại} \\ \begin{cases} -1 \le -\frac{b}{2a} \le 1 \\ \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow |m| \ge 1.$$

Vậy, với $|m| \ge 1$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 31. Đặt sinx + cosx = t, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra sinx.cosx = $\frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$mt + t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow f(t) = t^2 + mt - 1 = 0. \quad (1)$$

a. Với m = 2 phương trình có dạng:

$$t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, với m = 0 phương trình có một họ nghiệm.

b. Với $x \in [0, \pi]$ thì điều kiện $-1 \le t \le \sqrt{2}$ bởi phép biến đổi:

$$0 \le x \le \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \le x + \frac{\pi}{4} \le \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin(x + \frac{\pi}{4}) \le 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \le \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \le \sqrt{2} \Leftrightarrow -1 \le t \le \sqrt{2}.$$

Để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc $[0, \pi]$ điều kiện là:

(1) có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-1, \sqrt{2}]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ af(-1) \ge 0 \\ af(\sqrt{2}) \ge 0 \\ 0 \le \frac{S}{2} \le \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \le m \le 0.$$

Vậy, với $-\sqrt{2} \le m \le 0$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 32. Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \ne 0 \\ \cos x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ne \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\sin x - \cos x}{\sin x.\cos x} - k = 0 \Leftrightarrow \sin x - \cos x - k\sin x.\cos x = 0.$$

Đặt $\sin x - \cos x = t$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t - k.\frac{1-t^2}{2} = 0 \Leftrightarrow f(t) = kt^2 + 2t - k = 0. \qquad (2)$$

1. Với $k = 0$, ta được:

$$t = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy với $k = 0$ phương trình có một họ nghiệm.

2. Với $k \ne 0$, ta có:

$\Delta = 1 + k^2 > 0\ \forall k$, suy ra phương trình (2) có hai nghiệm là:

$$t_1 = \frac{-1-\sqrt{1+k^2}}{k};\ t_2 = \frac{-1+\sqrt{1+k^2}}{k}$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Rightarrow$ (2) có nghiệm thoả mãn $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$.

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Phương trình (2) có 1 nghiệm thuộc $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$$\Leftrightarrow f(-\sqrt{2})f(\sqrt{2}) \le 0 \Leftrightarrow (k-2\sqrt{2})(k+2\sqrt{2}) \le 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} \le k \le 2\sqrt{2}$$

Khi đó, nghiệm thuộc $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ là $t_2 = \dfrac{-1+\sqrt{1+k^2}}{k}$.

$$\Leftrightarrow \sin x - \cos x = \frac{-1+\sqrt{1+k^2}}{k} \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{-1+\sqrt{1+k^2}}{k\sqrt{2}} = \sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = \alpha + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm.

Trường hợp 2: Phương trình (2) có 2 nghiệm thuộc $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ af(\sqrt{2}) \ge 0 \\ af(-\sqrt{2}) \ge 0 \\ -\sqrt{2} \le \frac{S}{2} \le \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+k^2 \ge 0 \\ k(k+2\sqrt{2}) \ge 0 \\ k(k-2\sqrt{2}) \ge 0 \\ -\sqrt{2} \le -\frac{1}{k} \le \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k \ge 2\sqrt{2} \\ k \le -2\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Khi đó, ta lần lượt xét:

- Với $t_1 = \dfrac{-1-\sqrt{1+k^2}}{k}$

$$\Leftrightarrow \sin x - \cos x = \frac{-1-\sqrt{1+k^2}}{k} \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{-1-\sqrt{1+k^2}}{k\sqrt{2}} = \sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = \alpha + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

- Với $t_2 = \dfrac{-1+\sqrt{1+k^2}}{k}$

$$\Leftrightarrow \sin x - \cos x = \frac{-1+\sqrt{1+k^2}}{k} \Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{-1+\sqrt{1+k^2}}{k\sqrt{2}} = \sin\beta$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = \beta + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \beta + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \beta + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} - \beta + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có bốn họ nghiệm.

Bài tập 33. Đặt t = sinx – cosx, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra sinx.cosx = $\frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$mt + 1 - t^2 = m \Leftrightarrow f(t) = t^2 - mt + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = m - 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = 1 \\ t = m - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ t = m - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ t = m - 1 \ (*) \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

a. Với $m = 1 + \sqrt{2}$ ta đi giải thêm phương trình:

$$t = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin x - \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, với $m = 1 + \sqrt{2}$ phương trình có ba họ nghiệm.

b. Để phương trình có đúng hai nghiệm thuộc $[0, \pi]$ điều kiện là:

(*) vô nghiệm hoặc có nghiệm bằng 1

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |m - 1| > \sqrt{2} \\ m - 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 + \sqrt{2} \\ m < 1 - \sqrt{2} \\ m = 2 \end{array}\right..$$

Vậy, với $m \in (-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty) \cup \{2\}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 34. $-1 - 4\sqrt{2} \le m \le 1 - 4\sqrt{2}$.

Bài tập 35.

a. Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin 2x \ne 0 \\ 1 + \cos 4x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \ne 0 \\ 2\cos^2 2x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 4x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$1 - \cos^2 4x = 2\sin 4x.\sin 2x \Leftrightarrow \sin^2 4x = 2\sin 4x.\sin 2x$$

$$\overset{\sin 4x \ne 0}{\Leftrightarrow} \sin 4x = 2\sin 2x \Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x = 2\sin 2x \overset{\sin 2x \ne 0}{\Leftrightarrow} \cos 2x = 1 \text{ loại.}$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \ne 0 \\ \cos x \ne 0 \\ \cos 2x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \ne 0 \\ \cos 2x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 4x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ta có:

$$\cot g^2x - tg^2x = \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^2 x.\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\frac{1}{4}\sin^2 2x} = \frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x}$$

Do đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{4}{\sin^2 2x} = 32\cos^2 2x \Leftrightarrow 1 = 2\sin^2 4x \Leftrightarrow \cos 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{8}, k \in \mathbf{Z} \text{ thoả mãn điều kiện}$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Bài tập 36.

a. Điều kiện:

$$\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}. \quad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x.\cos x \Leftrightarrow 6\sin x - 2\cos^3 x = 10\sin x.\cos^2 x \quad (1)$$

- Với $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

  $$(1) \Leftrightarrow 6\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0 \text{ mâu thuẫn.}$$

  Vậy phương trình không nhận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ làm nghiệm.

- Với $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

  Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3 x \neq 0$, ta được

  $$6(1 + tg^2x)tgx - 2 = 10tgx \Leftrightarrow 3tg^3x - 2tgx - 1 = 0$$
  $$\Leftrightarrow (tgx - 1)(3tg^2x + 3tgx + 1) = 0$$
  $$\Leftrightarrow tgx = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ vi phạm điều kiện } (*).$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}. \quad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x.\cos^2 x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}.\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x.\sin x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x} \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \text{ loại.}$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

Bài tập 37.

a. Biến đổi tương đương phương trình về dạng:

$$\frac{2\sin 2x.\cos x+\sin 2x}{2\cos 2x.\cos x+\cos 2x}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{(2\cos x+1)\sin 2x}{(2\cos x+1)\cos 2x}=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\cos x+1\neq 0\\ \text{tg}2x=\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\neq -\dfrac{1}{2}\\ 2x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq \pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Điều kiện:

$$2\text{sinx.cosx}-1\neq 0\Leftrightarrow \sin 2x\neq 1\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.\qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$1+2\sin^2x-3\sqrt{2}\,\sin x+\sin 2x=\sin 2x-1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2x-3\sqrt{2}\,\sin x+2=0\overset{|\sin x|\le 1}{\Leftrightarrow}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\overset{(*)}{\Leftrightarrow}x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Bài tập 38.

a. Điều kiện:

$$\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0\Leftrightarrow 2x\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}.\qquad (*)$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\sin 3x-\cos 3x&=3\sin x-4\sin^3x-4\cos^3x+3\cos x\\&=3(\sin x+\cos x)-4(\sin^3x+\cos^3x)\\&=(\sin x+\cos x)[3-4(\sin^2x+\cos^2x-\sin x.\cos x)]\\&=(\sin x+\cos x)(2\sin 2x-1).\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x.\cos x}=\frac{2(\sin x+\cos x)}{\sin 2x}.$$

Do đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$2(\sin x + \cos x)(2\sin 2x - 1) = \frac{2(\sin x + \cos x)}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2\sin 2x - 1)\sin 2x = \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2\sin^2 2x - \sin 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ 2\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tg}x = -1 \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \\ \sin 2x = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

b. Điều kiện:

$$\cos x - \sin x \neq 0 \Leftrightarrow \text{tg}x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \cos 2x.\cos x - \cos 2x.\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) - \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin^3 x + \cos^3 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x + \cos x - 3\sin x + 4\sin^3 x + \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x + \cos^3 x - \sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x.\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tg}x = -1 \\ \sin 2x = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ 2x = k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài tập 39.

a. Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2(\sin x + \cos x)\sin x.\cos x = \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0\\ \sin 2x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tgx = -1\\ \sin 2x = 1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

b. Điều kiện:

$$\begin{cases}1 - \sin x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x \neq 1\\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}. \quad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2})^2 - 2\sin^2\frac{x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}}{1 - \sin x} = \frac{1}{2}(1 + \sin x) + (1 + \sin x)tg^2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}{1 - \sin x} = (1 + \sin x)(\frac{1}{2} + tg^2x) \Leftrightarrow 2 - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x)(1 + 2tg^2x)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos^2 x = \cos^2 x + 2\sin^2 x \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Bài tập 40.

a. Điều kiện:

$$\begin{cases}\sin 2x \neq 0\\ \cot g2x - \cos 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x \neq 0\\ \frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \cos 2x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x \neq 0\\ \cos 2x \neq 0\\ \sin 2x \neq 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow 4x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}. \quad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{3\left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x} + \cos 2x\right)}{\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \cos 2x} = 2(1 + \sin 2x) \Leftrightarrow \frac{3(1 + \sin 2x)}{1 - \sin 2x} = 2(1 + \sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow 3(1 + \sin 2x) = 2(1 - \sin^2 2x) \Leftrightarrow 2\sin^2 2x + 3\sin 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = -1 \text{ loại}.\\ \sin 2x = -\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\\ 2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{12} + k\pi\\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

b. Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin 2x \neq 0\\ \text{tg}x + \text{cotg}2x \neq 0\\ \text{cotg}x \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2x \neq 0\\ \text{tg}x + \text{cotg}2x \neq 0\\ \text{cotg}x \neq 1\end{cases}. \qquad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x}} = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\frac{\cos x}{\sin x} - 1} \Leftrightarrow \frac{\sin 2x.\cos x}{\cos(2x - x)} = \sqrt{2}\sin x$$

$$\overset{\sin x \neq 0}{\Leftrightarrow} 2\sin x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Kiểm tra điều kiện (*) ta chỉ nhận được nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Bài tập 41.

a. Nhận xét rằng:

$$\text{cotg}(x + \frac{\pi}{3}).\text{cotg}(\frac{\pi}{6} - x) = \text{cotg}(x + \frac{\pi}{3}).\text{tg}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + x)$$

$$= \text{cotg}(x + \frac{\pi}{3}).\text{tg}(x + \frac{\pi}{3}) = 1.$$

Từ đó, ta lần lượt có:

- Điều kiện có nghĩa của phương trình là:

$$\begin{cases}\sin(x + \frac{\pi}{3}) \neq 0\\ \cos(x + \frac{\pi}{3}) \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin(2x + \frac{2\pi}{3}) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \quad (*)$$

- Phương trình được biến đổi về dạng:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{7}{8} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{7}{8} \Leftrightarrow 4\sin^2 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - \cos 4x) = 1 \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

b. Điều kiện $\sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow 4x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{2}{2\sin 2x.\cos 2x} - \frac{1}{\sin 2x} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x.\cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x.\cos x.\cos 2x} \Leftrightarrow \cos 2x = \sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \text{ (loại)} \\ \sin x = \frac{1}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài tập 42.

a. Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sin 4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \sin 4x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x \neq \frac{k\pi}{4} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \quad (*)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2(\text{tg}3x - \text{tg}x) + (\text{tg}3x + \text{cotg}2x) = \frac{2}{\sin 4x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin 2x}{\cos 3x.\cos x} + \frac{\cos x}{\cos 3x.\sin 2x} = \frac{2}{\sin 4x}$$

$$\Leftrightarrow 4\sin4x.\sin x + 2\cos2x.\cos x = 2\cos3x$$

$$\Leftrightarrow 4\sin4x.\sin x + \cos3x + \cos x = 2\cos3x \Leftrightarrow 4\sin4x.\sin x = \cos3x - \cos x$$

$$\Leftrightarrow 8\sin2x.\cos2x.\sin x = -2\sin2x.\sin x \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \cos2x = -\frac{1}{4} = \cos2\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm 2\alpha + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm \alpha + k\pi, k \in Z.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm

b. Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin^4 x - \sin^3 x + 1 - \sin x = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1)\sin^3 x - (\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - 1)(\sin^3 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Bài tập 43. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = (\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2 \Leftrightarrow (\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} - 1)(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 1 \\ \sin\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{tg}\frac{x}{2} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + 4k\pi \\ x = 2\pi + 4k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Lần lượt kiểm tra các nghiệm cho điều kiện $\left|\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right| \leq \frac{3\pi}{4}$ chúng ta nhận được nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ và $x = \frac{5\pi}{2}$.

Bài tập 44. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos6x.\cos x - \frac{1}{2}(\cos6x + \cos4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos6x.\cos x - \cos5x.\cos x = 0 \Leftrightarrow (\cos6x - \cos5x)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 6x = \cos 5x\\ \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6x = \pm 5x + 2k\pi\\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{2k\pi}{11}\\ x = 2k\pi\\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Lần lượt kiểm tra các nghiệm cho điều kiện $|x| < 2$ chúng ta nhận được nghiệm của phương trình là $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{2k\pi}{11}$ với $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3$.

Bài tập 45. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin(2x + \frac{\pi}{2}) - 3\cos(x + \frac{\pi}{2}) = 1 + 2\sin x \Leftrightarrow \cos2x + 3\sin x = 1 + 2\sin x$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2x = 1 - \sin x \Leftrightarrow 2\sin^2x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = \frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\end{array}\right. \overset{x\in(\frac{\pi}{2},3\pi)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}x = \pi,\ x = 2\pi\\ x = \frac{13\pi}{6}\\ x = \frac{5\pi}{6},\ x = \frac{17\pi}{6}\end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có 5 nghiệm.

Bài tập 46. Tìm tổng các nghiệm thoả mãn $1 \le x \le 70$ của phương trình:

$$\cos2x - tg^2x = \frac{\cos^2 x - \cos^3 x - 1}{\cos^2 x}.$$

Điều kiện $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$ (*)

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\cos^2x - 1 - tg^2x = 1 - \cos x - (1 + tg^2x)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1\\ \cos x = \frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi + 2k\pi\\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}.$$

Với các nghiệm thoả mãn $1 \le x \le 70$, ta được:

$$1 \le \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \le 70 \Leftrightarrow \frac{3-\pi}{2\pi} \le k \le \frac{210-\pi}{2\pi} \overset{k\in Z}{\Rightarrow} k = \overline{0,32}.$$

Từ đó, ta nhận được:

$$S = \frac{1}{3}(\pi + 3\pi + 5\pi + \ldots + 65\pi) = 363\pi.$$

CHỦ ĐỀ 3
NHỮNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Các phương trình lượng giác rất đa dạng không thể có một công thức chung nào để giải mọi phương trình lượng giác, bởi vậy cần thiết sử dụng các phép biến đổi lượng giác thông thường để đưa phương trình ban đầu về các dạng cơ bản. Chúng ta đưa ra một nguyên tắc chung thường dùng khi giải phương trình lượng giác.

Thông thường phải thực hiện các việc sau:

- Nếu phương trình chứa nhiều hàm lượng giác khác nhau thì biến đổi tương đương về phương trình chỉ chứa một hàm.
- Nếu phương trình chứa các hàm lượng giác của nhiều cung khác nhau thì biến đổi tương đương về phương trình chỉ chứa các hàm lượng giác của một cung.

Sau khi biến đổi như trên nếu phương trình nhận được không có dạng quen thuộc thì có thể đi theo hai hướng:

Hướng thứ nhất:

Biến đổi phương trình đã cho để đưa về việc giải các phương trình đơn giản quen thuộc. Các phương pháp biến đổi theo hướng này gồm có:

Phương pháp đặt ẩn phụ

Để đưa phương trình về việc giải một phương trình đại số.

Thí dụ: Giải phương trình

$$2\cos^2 x = \sin x + 1.$$

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Đặt $t = \sin x$ điều kiện $|t| \le 1$, ta được

$$2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = -1/2 \end{array}\right.$$

Phương pháp hạ bậc

Nếu phương trình cần giải có bậc cao thì dùng công thức hạ bậc để biến đổi về bậc thấp hơn.

Thí dụ: Giải phương trình

$$\sin^2 3x - \sin^2 2x - \sin^2 x = 0.$$

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1-\cos 6x}{2} - \sin^2 2x - \frac{1-\cos 2x}{2} = 0 \Leftrightarrow (\cos 6x - \cos 2x) + 2\sin^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 4x.\sin 2x + 2\sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow -2\sin 2x(\sin 4x - \sin 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4\sin 2x.\cos 3x.\sin x = 0.$$

Phương pháp biến đổi thành phương trình tích

Thí dụ: Giải phương trình

$$\sin 2x + \sin 4x = 2\cos x$$

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin 3x.\cos x = 2\cos x \Leftrightarrow 2\cos x(\sin 3x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin 3x = 1\end{array}\right..$$

Phương pháp tổng các số hạng không âm

Thí dụ: Giải phương trình

$$2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 3tg^2 2x - 2\sqrt{3}\,tg2x + 2 = 0$$

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sqrt{2}\sin x - 1)^2 + (\sqrt{3}\,tg2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ tg2x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}.$$

Phương pháp đánh giá dùng để giải các phương trình không mẫu mực.

Thí dụ: Giải phương trình

$$\cos x.\cos 2005x = 1.$$

Lời giải

Ta có $|\cos x| \le 1$ và $|\cos 2005x| \le 1$.

Suy ra phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = -1 \;\&\; \cos 2005x = -1\\ \cos x = 1 \;\&\; \cos 2005x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\pi.$$

Phương pháp hàm số: sử dụng các tính chất của hàm số để giải phương trình.

Thí dụ: Giải phương trình:

$$2^{\cos x} - 2^{\sin x} = \sin x - \cos x.$$

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng:

$$2^{\cos x} + \cos x = 2^{\sin x} + \sin x.$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ đồng biến trên R.

Vậy, phương trình được viết dưới dạng:

$$f(\cos x) = f(\sin x) \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z.$$

Hướng thứ hai:

Dùng lập luận khẳng định phương trình cần giải là vô nghiệm.

Thí dụ: Giải phương trình

$$\sin 2x - \cos 2x = tgx + cotgx \qquad (1)$$

Lời giải

- Vế trái của (1) ta có $|\sin 2x - \cos 2x| \le \sqrt{2}$.
- Vế phải của (1) ta có $|tgx + cotgx| \ge 2$.

Vậy, phương trình (1) là vô nghiệm.

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC VÀ BÀI TẬP

Bài toán 1: Giải phương trình lượng giác bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Chúng ta thực chất đã làm quen với phương pháp đặt ẩn phụ để giải phương trình lượng giác trong các chủ đề

- Phương trình bậc 2 và bậc cao đối với một hàm số lượng giác.
- Phương trình đẳng cấp bậc 2 và bậc cao đối với sin và cos.
- Phương trình đối xứng.

Trong bài toán này chúng ta xét thêm những trường hợp khác, bao gồm:

1. Mọi phương trình lượng giác đều có thể thực hiện việc đại số hoá thông qua hàm tg, cụ thể nếu đặt $t = tgx$ thì:

$$cotgx = \frac{1}{t},$$

$$\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, tg2x = \frac{2t}{1-t^2}$$

2. Đặt $t = \frac{1}{\sin x}$ hoặc $t = \frac{1}{\cos x}$, điều kiện $|t| \geq 1$.

3. Đặt $t = a.\sin x + b.\cos x$, điều kiện $|t| \leq \sqrt{a^2+b^2}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1: Giải các phương trình:

a. $1 + 3tgx = 2\sin 2x$.

- ❑ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. $\sin 2x + 2tgx = 3$.

- ❑ $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 2: Giải các phương trình:

a. $1 + 3\sin 2x = 2tgx$. b. $6tgx = tg2x$.

Bài tập 3: Giải các phương trình:

a. $\cos x + tg\frac{x}{2} = 1$.

- ❑ $x = k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b. $2 + \cos x = 2\text{tg}\frac{x}{2}$.

- ❑ $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 4: Giải các phương trình:

a. $(1 - \text{tg}x)(1 + \sin 2x) = 1 + \text{tg}x$.

- ❑ $x = k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. $4\sin^2 x - \text{tg}^2 x = 1$.

- ❑ $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

c. $(\cos x - \sin x)\cos x.\sin x = \cos x.\cos 2x$.

- ❑ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 5: Cho phương trình:

$$\text{cotg}^2 x + \frac{m}{\sin x} + 2m - 1 = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = 1$.

- ❑ $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$.

- ❑ $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [4, +\infty)$.
- ❑ $(-\infty, 4 - 2\sqrt{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$.
- ❑ $(-\infty, -4] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$.
- ❑ $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [4 + 2\sqrt{2}, +\infty)$.

Bài tập 6: Cho phương trình:

$$4tg^2x - 2m(1 + tg^2x)tgx + \frac{4}{\cos^4 x} = 0.$$

a. Giải phương trình với m = −5.

- ❑ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

- ❑ $-5 \le m \le 0$.
- ❑ $0 \le m \le 3$.
- ❑ $3 \le m \le 5$.
- ❑ $|m| \le 5$.

Bài tập 7: Cho phương trình:

$$(1 - m)tg^2x - \frac{2}{\cos x} + 1 + 3m = 0$$

a. Giải phương trình với $m = \frac{1}{2}$.

- ❑ $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. Tìm m để phương trình có nhiều hơn 1 nghiệm trong khoảng $(0, \frac{\pi}{2})$.

- ❑ $m \in (\frac{1}{3}, 3) \backslash \{1\}$.
- ❑ $m \in (0, 2) \backslash \{\frac{1}{3}\}$.
- ❑ $m \in (\frac{1}{3}, 1) \backslash \{\frac{1}{2}\}$.
- ❑ $m \in (\frac{1}{2}, 3) \backslash \{2\}$.

Bài tập 8: Cho phương trình:

$$\frac{4}{\cos^2 x} + \cos^2x + m(\frac{2}{\cos x} + \cos x) - 3 = 0.$$

a. Giải phương trình với $m = -\frac{2}{3}$.

- ❑ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ Vô nghiệm.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$.

□ $m \le -\frac{9}{4}$. □ $m \le -\frac{5}{2}$. □ $0 \le m \le \frac{1}{2}$. □ $\frac{9}{4} \le m \le \frac{5}{2}$.

Bài tập 9: Cho phương trình:

$$3\cos x + 4\sin x + \frac{6}{3\cos x + 4\sin x + 1} = m.$$

a. Giải phương trình với m = 6.

□ $x = k\pi$ và $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

□ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

□ $x = -\alpha + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ với $tg\alpha = \frac{3}{4}$.

□ $x = -\alpha + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ với $tg\alpha = \frac{4}{3}$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm thuộc $(0, \pi)$.

□ $(-\infty, -6] \cup [-5, 1] \cup [24, +\infty)$.

□ $(-\infty, -5] \cup [1, \sqrt{24}] \cup [5, +\infty)$.

□ $(-\infty, 1 - \sqrt{24}] \cup [1 + \sqrt{24}, +\infty)$.

□ $(-\infty, -6] \cup [-5, 1 - \sqrt{24}] \cup [1 + \sqrt{24}, +\infty)$.

Bài toán 2: Giải phương trình lượng giác bằng phương pháp đổi biến

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta sử dụng biến t để chuyển phương trình ban đầu về phương trình chứa các cung t, 2t, 3t, ..., kt, rồi sử dụng các công thức góc nhân đôi, nhân ba ...

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 10: Giải các phương trình sau:

a. $\sin 3x + 2\cos(\frac{\pi}{6} - x) = 0$.

□ $x = -\frac{\pi}{3} - k\pi, x = -\frac{\pi}{6} - k\pi$ và $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

□ $x = \frac{\pi}{3} - k\pi, x = -\frac{\pi}{4} - k\pi$ và $x = \pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

□ $x = \frac{\pi}{4} - k\pi, x = \frac{\pi}{3} - k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

□ $x = \frac{\pi}{6} - k\pi, x = \frac{\pi}{3} - k\pi, x = \frac{\pi}{4} - k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. $\cos 3x = 2\sin(x + \frac{5\pi}{6})$.

- ❑ $x = \frac{\pi}{3} - k\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} - k\pi$ và $x = -\pi + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{4} - k\pi$, $x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = -\frac{5\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{3} - k\pi$, $x = \frac{\pi}{4} - k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = -\frac{5\pi}{6} + k\pi$, $x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi$ và $x = -\pi + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 11: Giải các phương trình sau:

a. $\sin(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{10}) = 3\sin(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2})$.

- ❑ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{3\pi}{5} - 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ Vô nghiệm.

b. $\sin(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}) = 3\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$.

- ❑ $x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{4} - 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ Vô nghiệm.

Bài tập 12: Giải các phương trình sau:

a. $\cos 9x + 2\cos(6x + \frac{2\pi}{3}) + 2 = 0$.

- ❑ $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$, $x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = -\frac{5\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{4} - k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$, $x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi$ và $x = -\pi + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$ và $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

b. $\cos\frac{6x}{5} + 2 = 2\cos\frac{8x}{5} + \cos\frac{2x}{5}$.

- ❑ $x = k\pi$ và $x = \pm\alpha + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ với $tg\alpha = 2$.
- ❑ $x = 2k\pi$ và $x = \pm\alpha + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ với $\sin\alpha = \frac{1}{4}$.
- ❑ $x = \frac{5k\pi}{4}$ và $x = \pm\frac{5\alpha}{2} + 5k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ với $\cos\alpha = \frac{1}{4}$.
- ❑ $x = \frac{3k\pi}{5}$ và $x = \pm\frac{\alpha}{5} + 5k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ với $cotg\alpha = \frac{1}{3}$.

Bài toán 3: Giải phương trình lượng giác sử dụng công thức hạ bậc.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa.

Bước 2: Thực hiện việc hạ bậc của phương trình bằng các công thức:

<u>*Hạ bậc đơn*</u>:

1. $\sin^2x = \frac{1}{2}(1 - \cos2x)$ 5. $\sin^3x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin3x)$

2. $\cos^2x = \frac{1}{2}(1 + \cos2x)$ 6. $\cos^3x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos3x)$

3. $tg^2x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$ $tg^3x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{3\cos x + \cos 3x}$

4. $cotg^2x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$ $cotg^3x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{3\sin x - \sin 3x}$

Ngoài ra còn có $\sin x.\cos x = \frac{1}{2}\sin2x$.

Hạ bậc toàn cục: Chúng ta đã được biết trong dạng phương trình hỗn hợp chứa $\sin^nx$ và $\cos^nx$.

Hạ bậc đối xứng: Giả sử cần biến đổi biểu thức dạng:

$$A = \sin^3x.\cos3x + \cos^3x.\sin3x$$

ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$A = \sin^2x.\sin x.\cos3x + \cos^2x.\cos x.\sin3x$$
$$= (1 - \cos^2x).\sin x.\cos3x + (1 - \sin^2x).\cos x.\sin3x$$
$$= \sin x.\cos3x + \cos x.\sin3x - (\cos x.\cos3x + \sin x.\sin3x)\sin x.\cos x$$
$$= \sin4x - \frac{1}{2}\cos2x.\sin2x = \sin4x - \frac{1}{4}\sin4x = \frac{3}{4}\sin4x.$$

Cách 2: Ta có:

$$A = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin3x)\cos3x + \frac{1}{4}(3\cos x + \cos3x)\sin3x$$
$$= \frac{3}{4}(\sin x.\cos3x + \cos x.\sin3x) = \frac{3}{4}\sin4x.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 13: Giải các phương trình sau:

a. $\sin^24x - \cos^26x = \sin(10x + \frac{21\pi}{2})$.

b. $\sin^2x + \sin^23x = \cos^22x + \cos^24x$.

c. $\sin^23x - \cos^24x = \sin^25x - \cos^26x$.

Bài tập 14: Giải các phương trình sau:

a. $\sin^2 3x + \sin^2 2x + \sin^2 x = \frac{3}{2}$.

- ❑ $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$ và $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \pi + 2k\pi$ và $x = \pm\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. $\sin^2 3x - \sin^2 2x - \sin^2 x = 0$.

- ❑ $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$ và $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ và $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{3} + \frac{3k\pi}{2}$ và $x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 15: Giải các phương trình sau:

a. $\sin^3 x.\sin 3x + \cos^3 x.\cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

- ❑ $x = \pm\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. $\sin^3 x.\sin 3x + \cos^3 x.\cos 3x = \cos^3 4x$.

- ❑ $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

c. $\cos^3 x.\cos 3x - \sin 3x.\sin^3 x = \cos^3 4x + \frac{1}{4}$.

- ❑ $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

d. $\sin^3 2x.\cos 6x + \sin 6x.\cos^3 2x = \frac{3}{8}$.

- ❑ $x = \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}$ và $x = \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}$ và $x = \frac{5\pi}{36} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ và $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 16: Giải các phương trình sau:

a. $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16}\cos^2 2x$.

- ❑ $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

b. $\cos^4 x - \cos 2x + 2\sin^6 x = 0$.

- ❑ $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 17: Giải các phương trình sau:

a. $\cos^4 x + \cos^4(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4}$.

- ❑ $x = k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = k\pi$ và $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. $\frac{\sin^{10} x + \cos^{10} x}{4} = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{4\sin^2 2x + \cos^2 2x}$.

- ❑ $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 18: Giải các phương trình sau:

a. $2\cos^2x + 2\cos^2 2x + 2\cos^2 3x - 3 = (2\sin 2x + 1)\cos 4x$.

❑ $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$. ❑ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$. ❑ $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

b. $\cos 3x + \sin 7x = 2\sin^2(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4}) - 2\cos^2\frac{9x}{2}$.

❑ $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}, x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$

❑ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

❑ $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ và $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 19: Giải phương trình:

$$32\cos^6x = 1 + \cos 6x.$$

Bài tập 20: Giải phương trình:

$$\sin^2 2x - \cos^2 8x = \sin(\frac{17\pi}{2} + 10x).$$

Bài tập 21: Cho phương trình:

$$\sin^2[(x + 1)y] = \sin^2(xy) + \sin^2[(x - 1)y].$$

Tìm nghiệm x, y của phương trình để $(x + 1)y$, xy, $(x - 1)y$ là số đo các góc của tam giác.

Bài tập 22: Xác định m để phương trình :

$$\sin^4x + \cos^4x + \frac{1}{4}m.\sin 4x - (2m + 1)\sin^2x.\cos^2x = 0$$

có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

❑ $2\sqrt{5} - 4 < m < \frac{1}{2}$. ❑ $4 - 2\sqrt{5} < m < \frac{1}{2}$.

❑ $2 < m < 2\sqrt{5} + 4$ ❑ $-2\sqrt{5} < m < 6$.

Bài tập 23: Xác định m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sin^6x + \cos^6x = m(\sin^4x + \cos^4x)$$

❑ $m \geq \frac{1}{2}$. ❑ $0 \leq m \leq 1$. ❑ $m \leq 0$. ❑ $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$.

Bài tập 24: Cho phương trình:

$$\frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 2m.\text{tg}2x.$$

a. Giải phương trình khi $m = \frac{1}{8}$.

☐ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. ☐ $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

☐ $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. ☐ Vô nghiệm.

b. Xác định m để phương trình có nghiệm.

☐ $m \geq \frac{1}{8}$. ☐ $0 \leq m \leq \frac{1}{8}$. ☐ $m \leq 2$. ☐ $|m| > \frac{1}{8}$.

Bài tập 25: Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = m|\sin 2x|$$

☐ $m \geq \frac{1}{4}$. ☐ $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$. ☐ $m \leq 1$. ☐ $|m| > \frac{1}{2}$.

Bài tập 26: Tìm tổng các nghiệm của phương trình:

$$2\cos^2 x + \cot g^2 x = \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x}$$

thoả mãn $2 \leq x \leq 40$.

Bài toán 4: Giải phương trình lượng giác bằng việc biến đổi nó về dạng tích.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Việc biến đổi phương trình lượng giác về phương trình tích phụ thuộc vào các phép biến đổi dạng:

Dạng 1: Biến đổi tổng, hiệu thành tích.
Dạng 2: Biến đổi tích thành tổng.
Dạng 3: Lựa chọn phép biến đổi cho cos2x.
Dạng 4: Phương pháp luận hệ số.
Dạng 5: Phương pháp hằng số biến thiên.
Dạng 6: Phương pháp nhân.
Dạng 7: Sử dụng các phép biến đổi hỗn hợp.

Ta đưa phương trình cần giải về dạng tích:

$$A.B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.,$$

trong đó các phương trình $A = 0$, $B = 0$ là các phương trình có dạng chuẩn.

Với các bài toán có tham số, để xác định điều kiện sao cho phương trình có đúng k nghiệm trên miền D, cần chú ý tới số nghiệm của mỗi phương trình thành phần.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 27:

a. $\sin^2 x + \cos^3 x + \sin x = 0$.

b. $(2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) + 4\cos^2 x = 3$.

Bài tập 28: Giải các phương trình sau:

a. $2\sin^3x + \cos 2x - \sin x = 0$.

- ☐ $x = k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

b. $\sin 3x - \sin x + \sin 2x = 0$.

- ☐ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$ và $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ☐ $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$ và $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 29: Giải các phương trình sau:

a. $tg^2x = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$.

- ☐ $x = \pi + 2k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{3} + + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. $cotg^2x = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$.

- ☐ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{3} + + k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 30: Giải các phương trình sau:

a. $tg^2x = \frac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x}$. b. $tg^2x = \frac{1+\cos^3 x}{1+\sin^3 x}$.

Bài tập 31: Giải các phương trình sau:

a. $\cos^2x + \cos^3x + 2\sin x - 2 = 0$.

b. $\sin 3x - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2x = 2\cos 2x.\sin x$.

Bài tập 32: Giải các phương trình sau:

a. $3tg3x + cotg2x = 2tgx + \frac{2}{\sin 4x}$.

b. $cotgx - tgx = \sin x + \cos x$.

Bài tập 33: Giải các phương trình sau:

a. $\frac{3(\cos 2x + cotg2x)}{cotg2x - \cos 2x} - 2\sin 2x = 2$.

- ❑ $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ và $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. $\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 8\sin x.\sin 3x$.

- ❑ $x = \frac{k\pi}{4}$ và $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = k\pi$ và $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 34: Giải các phương trình sau:

a. $3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$.

b. $4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1$.

Bài tập 35: Giải các phương trình sau:

a. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x = 0$.

b. $\cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{3x}{2} - \sin x.\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{3x}{2} = \frac{1}{2}$.

Bài tập 36: Giải các phương trình sau:

a. $\sin 3x.\sin 6x = \sin 9x$.

b. $1 + tg2x = \dfrac{1 - \sin 2x}{\cos^2 2x}$.

Bài tập 37: Giải các phương trình sau:

a. $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin x + \cos x$.

b. $2\cos 2x - \sin 2x = 2(\sin x + \cos x)$.

Bài tập 38: Giải các phương trình sau:

a. $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x - \cos x$.

- ❑ $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ Vô nghiệm.

b. $\sin^2 x.\cos x - \cos 2x + \sin x - \cos^2 x.\sin x - \cos x = 0$.

- ❑ $x = \pi + 2k\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \pi + 2k\pi$, $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ và $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ Vô nghiệm.

Bài tập 39: Giải các phương trình sau:

a. $\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$.

- ❑ $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ Vô nghiệm.

b. $\sin^2 x + 2\sin^2 \dfrac{x}{2} - 2\sin x.\ \sin^2 \dfrac{x}{2} + \cot g x = 0$.

- ❑ $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ Vô nghiệm.

Bài tập 40: Tìm x thuộc đoạn [0, 14] nghiệm đúng phương trình:

$$\sin 3x + \sin 2x = 5\sin x.$$

Bài tập 41: Cho phương trình:

$$(2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + m) = 3 - 4\cos^2 x.$$

a. Giải phương trình khi m = 1.

- ❑ $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ và $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- ❑ Vô nghiệm.

b. Xác định m để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc $[0,\pi]$.

□ $m \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \cup \{0\}$. □ $m \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty) \cup \{1\}$.

□ $m \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \cup \{3\}$. □ Vô nghiệm.

Bài tập 42: Cho phương trình:

$$\sin2(x - \pi) - \sin(3x - \pi) = m.\sin x.$$

a. Giải phương trình với m = 1.

□ $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

□ $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ và $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

□ $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ và $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

□ $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ và $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

□ $m \geq \frac{5}{4}$. □ $0 \leq m \leq \frac{5}{4}$. □ $m \leq 1$. □ $-\frac{5}{4} \leq m < 5$.

Bài tập 43: Xác định m để phương trình:

$$\cos3x - \cos2x + m\cos x - 1 = 0$$

có đúng 7 nghiệm thuộc khoảng $(-\frac{\pi}{2}, 2\pi)$.

□ $m \geq 1$. □ $0 < m < 1$. □ $1 < m < 3$ □ $\frac{1}{2} \leq m < 2$.

Bài tập 44: Xác định m để phương trình:

$$m\cos3x + 4(1 - 2m)\sin^2x + (7m - 4)\cos x + 8m - 4 = 0$$

có đúng 3 nghiệm thuộc khoảng $(0, 2\pi)$.

□ $m > 0$. □ $1 < m < 2$. □ $0 < m < 2$. □ $m < \frac{1}{2}$.

Bài toán 5: Giải phương trình lượng giác bằng việc biến đổi phương trình thành tổng các đại lượng không âm.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta cần nhớ các đại lượng không âm trong lượng giác, bao gồm:

$$A^2,\ |B|,\ 1 \pm \cos x,\ 1 \pm \sin x,$$

do đó để sử dụng phương pháp này giải phương trình lượng giác ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi phương trình ban đầu về dạng:

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = 0. \quad (1)$$

Bước 2: Dùng lập luận khẳng định $A_i \geq 0, \forall i = \overline{1,n}$.

Bước 3: Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = 0 \\ \dots \\ A_n = 0 \end{cases} \qquad (I)$$

Bước 4: Giải hệ (I).

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 45: Giải phương trình:

a. $\cos^4x + \sin^6x = \cos2x$.

- ❑ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ Vô nghiệm.

b. $\sin^2x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x.\sin^2 3x$.

- ❑ $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ và $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ và $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 46: Giải phương trình:

$$\sin^2x + \sin^2y + \sin^2(x + y) = \frac{9}{4}.$$

Bài tập 47: Giải phương trình:

$$tg^2x + tg^2y + cotg^2(x + y) = 1.$$

Bài tập 48: Giải phương trình:

$$x^2 - 2x.\sin xy + 1 = 0.$$

Bài toán 6: Giải phương trình lượng giác bằng phương pháp đánh giá.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta đánh giá phương trình dựa trên các dạng:

Dạng 1: Tính chất của các hàm số lượng giác và biểu thức lượng giác.

Dạng 2: Phương trình lượng giác dạng Pitago.

Dạng 3: Sử dụng bất đẳng thức Côsi.

Dạng 4: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 49: Giải các phương trình:

a. $\sin 2x.\cos 8x = 1$.

- ☐ $x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ Vô nghiệm.

b. $\sin^3 x + \cos^3 x = (2 - \sin^4 x)$.

- ☐ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ Vô nghiệm.

c. $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x$.

- ☐ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ Vô nghiệm.

d. $4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1$.

- ☐ $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ và $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 50:

a. $\sin^2 2x - \text{tg}^2 x = \frac{9}{2}\cos 2x$.

b. $\frac{\sin 3x}{\cos 2x} + \frac{\cos 3x}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 3x}$.

c. $2\sin 3x - \frac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \frac{1}{\cos x}$.

Bài tập 51: Giải các phương trình:

a. $\text{cotg} 2x + \text{cotg} 3x + \frac{1}{\sin x.\sin 2x.\sin 3x} = 0$.

b. $\frac{\sin 4x + \sin 2x - 4\sin 3x + 2\cos 2x - 4}{\sin x - 1} = 0$.

Bài tập 52: Giải các phương trình:

a. $7\cos^2 x + 1995\sin^{1994} x = 1995$.

- ☐ $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ Vô nghiệm.

b. $\cos^{13}x + \sin^{14}x = 1$.

- ☐ $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{13} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ và $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c. $\cos^{13}x + \sin^{14}x = 1$.

- ☐ $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{13} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{k\pi}{2}$ và $x = \frac{\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ và $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d. $\sin^{2000}x + \cos^{2000}x = 1$.

- ☐ $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 53: Giải phương trình:

$$\left(\sin^3\frac{x}{2} + \frac{1}{\sin^3\frac{x}{2}}\right)^2 + \left(\cos^3\frac{x}{2} + \frac{1}{\cos^3\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{81}{4}\cos^2 4x.$$

- ☐ $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ Vô nghiệm.

Bài tập 54: Giải phương trình:

$$\left(\text{tg}x + \frac{1}{4}\text{cotg}x\right)^n = \cos^n x + \sin^n x, \text{ với } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Bài tập 55: Giải các phương trình:

a. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$.

- ☐ $x = 0$.
- ☐ $x = 1$.
- ☐ $x = \pi$.
- ☐ $x = 2\pi$.

b. $\cos x = 1 + x$.

- ☐ $x = 0$.
- ☐ $x = 1$.
- ☐ $x = \pi$.
- ☐ $x = 2\pi$.

Bài tập 56: Giải các phương trình:

a. $\sin x + tgx - 2x = 0$, với $0 \le x < \frac{\pi}{2}$.

❑ $x = 0$. ❑ $x = 1$. ❑ $x = \pi$. ❑ $x = 2\pi$.

b. $x - \sin\frac{\pi}{3}(x + 1)\sin\frac{\pi(1 - x)}{3} = 0$ với $x \in [0,1]$.

❑ $x = \frac{1}{2}$. ❑ $x = 0$. ❑ $x = \pi$. ❑ $x = 2\pi$.

Bài tập 57: Giải các phương trình:

a. $12\sin x + 5\cos x = 2y^2 - 8x + 21$.

b. $\frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = y^2 - 4y + 5$.

c. $\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 + \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2}\sin y$.

Bài tập 58: Giải phương trình:

$$2m^2 - 2m(\cos x + \sin x) + \frac{3}{2} = \cos x - \sin x, \text{ tuỳ theo tham số m.}$$

Bài tập 59: Tìm m để phương trình có nghiệm:

$$(2m + 1)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x) + 2m^2 + 2m + 2 = 0.$$

Bài tập 60: Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$(\cos 4x - \cos 2x)^2 = (m^2 + 4m + 3)(m^2 + 4m + 6) + 7 + \sin 3x.$$

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1.

a. Điều kiện $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $t = tgx$, suy ra $\sin 2x = \frac{2t}{1 + t^2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$1 + 3t = \frac{4t}{1 + t^2} \Leftrightarrow (1 + 3t)(1 + t^2) = 4t \Leftrightarrow 3t^3 + t^2 - t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t + 1)(3t^2 - 2t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow tgx = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

b. Điều kiện $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $t = tgx$, suy ra $\sin 2x = \frac{2t}{1 + t^2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$\frac{2t}{1+t^2} + 2t = 3 \Leftrightarrow 2t + 2t(1+t^2) = 3(1+t^2) \Leftrightarrow 2t^3 - 3t^2 + 4t - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(2t^2 - t + 3) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \text{tg}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Bài tập 2.

a. Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $t = \text{tg}x$, suy ra $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$1 + \frac{6t}{1+t^2} = 2t \Leftrightarrow 1 + t^2 + 6t = 2t(1+t^2) \Leftrightarrow 2t^3 - t^2 - 4t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(2t^2 - 3t - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t + 1 = 0 \\ 2t^2 - 3t - 1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tg}x = -1 \\ \text{tg}x = \frac{3+\sqrt{17}}{4} = \text{tg}\alpha \\ \text{tg}x = \frac{3-\sqrt{17}}{4} = \text{tg}\beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \\ x = \beta + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

b. Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $t = \text{tg}x$, suy ra $\text{tg}2x = \frac{2t}{1-t^2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$6t = \frac{2t}{1-t^2} \Leftrightarrow 3t(1-t^2) = t \Leftrightarrow t(3t^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{tg}x = 0 \\ \text{tg}x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\text{tg}\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\alpha + k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài tập 3.

a. Điều kiện $\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $t = \text{tg}\frac{x}{2}$, suy ra $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}+t=1 \Leftrightarrow 1-t^2+(t-1)(1+t^2)=0 \Leftrightarrow t^3-2t^2+t=0$$

$$\Leftrightarrow t(t-1)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}x=0 \\ \mathrm{tg}x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Điều kiện $\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x \neq \pi+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$, suy ra $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$2+\frac{1-t^2}{1+t^2}=2t \Leftrightarrow 2t^3-t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2+t+3)=0$$

$$\Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\frac{x}{2}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Bài tập 4.

a. Điều kiện $\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x \neq \pi+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $t=\mathrm{tg}x$, suy ra $\sin 2x=\frac{2t}{1+t^2}$. Khi đó, phương trình có dạng:

$$(1-t)\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)=1+t \Leftrightarrow 2t^2(t+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}x=0 \\ \mathrm{tg}x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Điều kiện $\cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x \neq \pi+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$2(1-\cos 2x)-\mathrm{tg}^2x-1=0 \Leftrightarrow 2\cos 2x+\mathrm{tg}^2x-1=0.$$

Đặt $t=\mathrm{tg}^2x$, suy ra $\cos 2x=\frac{1-t}{1+t}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$\frac{2(1-t)}{1+t}+t-1=0 \Leftrightarrow t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \mathrm{tg}^2x=1$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}x=\pm 1 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

c. Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\cos x - \sin x)\cos x.\sin x = \cos x.(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x.(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x.(\cos x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = \sin x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài tập 5. Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\frac{1}{\sin^2 x} - 1 + \frac{m}{\sin x} + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{m}{\sin x} + 2m - 2 = 0.$$

Đặt $t = \dfrac{1}{\sin x}$, điều kiện $|t| \geq 1$. Khi đó, phương trình có dạng:

$$f(t) = t^2 + mt + 2m - 2 = 0. \quad (1)$$

a. Với m = 1, ta được:

$$t^2 + t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = 0 \text{ (loại)}\\ t = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x} = 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, với m = 1 phương trình có một họ nghiệm.

b. Phương trình có nghiệm thuộc $(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm $|t| \geq 2$.

Ta đi xét bài toán ngược "*Tìm điều kiện của m để phương trình (1) vô nghiệm hoặc cả hai nghiệm đều thuộc khoảng* (–2, 2)"

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta < 0\\ \begin{cases}\Delta \geq 0\\ af(-2) > 0\\ af(2) > 0\\ -2 < \dfrac{S}{2} < 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m^2 - 8m + 8 < 0\\ \begin{cases}m^2 - 8m + 8 \geq 0\\ 2 > 0\\ 4m + 2 > 0\\ -2 < -\dfrac{m}{2} < 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 4 + 2\sqrt{2}.$$

Vậy, với $m \leq -\dfrac{1}{2}$ hoặc $m \geq 4 + 2\sqrt{2}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 6. Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$4tg^2x - 2m(1 + tg^2x)tgx + 4(1 + tg^2x)^2 = 0.$$

Chia cả hai vế của phương trình cho $(1 + tg^2x)^2 \neq 0$, ta được:

$$4\left(\frac{tgx}{1+tg^2x}\right)^2 - 2m.\frac{tgx}{1+tg^2x} + 4 = 0.$$

Đặt $t = \frac{tgx}{1+tg^2x}$, điều kiện $|t| \le \frac{1}{2}$ bởi:

$$1 + tg^2x \overset{\text{Côsi}}{\geq} 2|tgx| \Leftrightarrow \left|\frac{tgx}{1+tg^2x}\right| \le \frac{1}{2}.$$

Khi đó, phương trình có dạng:

$$f(t) = 2t^2 - mt + 2 = 0. \quad (1)$$

a. Với m = – 5, ta được:

$$2t^2 + 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\frac{1}{2} \\ t = -2 \text{ loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{tgx}{1+tg^2x} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow tgx = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, với m = – 5 phương trình có một họ nghiệm.

b. Phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có nghiệm } t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(1) có 1 nghiệm thuộc } (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ \text{(1) có 2 nghiệm thuộc } (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-1/2).f(1/2) \le 0 \text{ (cần thử lại)} \\ \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ af(-1/2) > 0 \\ af(1/2) > 0 \\ -\frac{1}{2} < \frac{S}{2} < \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow |m| \le 5.$$

Vậy, với $|m| \le 5$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 7. Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1 - m)(\frac{1}{\cos^2 x} - 1) - \frac{2}{\cos x} + 1 + 3m = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - m).\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{\cos x} + 4m = 0$$

Đặt $t = \frac{1}{\cos x}$, điều kiện $|t| \ge 1$, khi đó phương trình có dạng:

$$f(t) = (1 - m)t^2 - 2t + 4m = 0. \quad (1)$$

a. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. Với $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow 0 < \cos x < 1 \Rightarrow t > 1$.

Để phương trình có nhiều hơn một nghiệm thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm thoả mãn $1 < t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ af(1) > 0 \\ S/2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 4m + 1 > 0 \\ (1-m)(3m-1) > 0 \\ \frac{1}{1-m} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < m < 1 \\ m \ne \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy, với $m \in (\frac{1}{3}, 1) \backslash \{\frac{1}{2}\}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 8. Điều kiện $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đặt $t = \frac{2}{\cos x} + \cos x$ điều kiện $|t| \ge 4$, suy ra $\frac{4}{\cos^2 x} + \cos^2 x = t^2 - 4$.

Khi đó, phương trình (1) có dạng:

$$t^2 - 4 + mt - 3 = 0 \Leftrightarrow f(t) = t^2 + mt - 7 = 0. \quad (1)$$

a. Với $m = -\frac{2}{3}$, ta được:

$$3t^2 - 2t - 21 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -\frac{7}{3} \text{ loại.} \end{array}\right.$$

Vậy, với $m = -\frac{2}{3}$ phương trình vô nghiệm.

b. Phương trình có nghiệm thuộc $(0, \frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm thoả mãn $t \ge 4$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(1) có 1 nghiệm } t \ge 4 \\ \text{(1) có 2 nghiệm } t \ge 4 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow af(4) \le 0 \Leftrightarrow 9 + 4m \le 0 \Leftrightarrow m \le -\frac{9}{4}.$$

Vậy, với $m \le -\frac{9}{4}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 9. Điều kiện $3\cos x + 4\sin x + 1 \ne 0$. (*)

Đặt $t = 3\cos x + 4\sin x + 1$, điều kiện $-4 \le t \le 6$, kết hợp với (*), ta được điều kiện $t \in [-4, 6] \backslash \{0\}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t - 1 + \frac{6}{t} = m \Leftrightarrow f(t) = t^2 - (m + 1)t + 6 = 0. \quad (1)$$

a. Với m = 6, ta được:

$$t^2 - 7t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 6 \end{array}\right..$$

- Với t = 1, ta được:

$$3\cos x + 4\sin x + 1 = 1 \Leftrightarrow 3\cos x + 4\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow tgx = -\frac{3}{4} = tg\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

- Với t = 6, làm tương tự.

$$3\cos x + 4\sin x + 1 = 6 \Leftrightarrow 3\cos x + 4\sin x = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}\cos x + \frac{4}{5}\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, với m = 6 phương trình có hai họ nghiệm.

b. Phương trình có nghiệm thuộc $(0, \pi)$

$\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm thoả mãn $t \in D = [-2, 6] \setminus \{0\}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(1) có 1 nghiệm thuộc D} \\ \text{(1) có 2 nghiệm thuộc D} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-2).f(6) \le 0 \\ \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ af(-2) \ge 0 \\ af(6) \ge 0 \\ -2 \le \frac{S}{2} \le 6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -6 \\ -5 \le m \le 1 - \sqrt{24} \\ m \ge 1 + \sqrt{24} \end{array}\right.$$

Vậy, với $m \in (-\infty, -6] \cup [-5, 1 - \sqrt{24}] \cup [1 + \sqrt{24}, +\infty)$

Chú ý: Trong lời giải trên chúng ta không cần kiểm tra điều kiện $t \ne 0$ bởi f(t) có ac = 6 > 0.

Bài tập 10.

a. Đặt $t = \frac{\pi}{6} - x \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - 3t$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$\sin(\frac{\pi}{2} - 3t) + 2\cos t = 0 \Leftrightarrow \cos 3t + 2\cos t = 0 \Leftrightarrow 4\cos^3 t - \cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t = 0 \\ \cos t = \pm\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ t = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} - k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} - k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{\pi}{2} - k\pi \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

b. Đặt $t = x + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow 3x = 3t - \frac{5\pi}{2}$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\cos(3t - \frac{5\pi}{2}) = 2\sin t \Leftrightarrow \sin 3t = 2\sin t \Leftrightarrow 4\sin^3 t - \sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin t = 0\\ \sin t = \pm\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = k\pi\\ t = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{5\pi}{6} + k\pi\\ x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi\\ x = -\pi + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Bài tập 11.

a. Đặt $t = \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{10} = \pi - 3t$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\sin(\pi - 3t) = 3\sin t \Leftrightarrow \sin 3t = 3\sin t \Leftrightarrow 4\sin^3 t = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = k\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{5} - 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

b. Đặt $t = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi - 3t$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\sin(\pi - 3t) = 3\sin t \Leftrightarrow \sin 3t = 3\sin t \Leftrightarrow 4\sin^3 t = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Bài tập 12.

a. Đặt $t = 3x + \frac{\pi}{3} \Rightarrow 6x + \frac{2\pi}{3} = 2t$ và $9x = 3t - \pi$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\cos(3t - \pi) + 2\cos 2t + 2 = 0 \Leftrightarrow -\cos 3t + 2\cos 2t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\cos t - 4\cos^3 t + 4\cos^2 t - 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^3 t - 4\cos^2 t - 3\cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow (4\cos^2 t - 4\cos t - 3)\cos t = 0 \Leftrightarrow (2\cos t + 1)(2\cos t - 3)\cos t = 0$$

$$\overset{|\cos t| \le 1}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}\cos t = 0\\ \cos t = -\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}\\ x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\\ x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

b. Đặt $t = \frac{2x}{5} \Rightarrow \frac{6x}{5} = 3t$ và $\frac{8x}{5} = 4t$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$\cos 3t + 2 = 2\cos 4t + \cos t \Leftrightarrow 2(1 - \cos 4t) + (\cos 3t - \cos t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 2t - 2\sin 2t.\sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2t = 0 \\ 2\sin 2t - \sin t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2t = 0 \\ (4\cos t - 1)\sin t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2t = 0 \\ \cos t = \frac{1}{4} = \cos\alpha \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{k\pi}{2} \\ t = \pm\alpha + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2x}{5} = \frac{k\pi}{2} \\ \frac{2x}{5} = \pm\alpha + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5k\pi}{4} \\ x = \pm\frac{5\alpha}{2} + 5k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Bà tập 13.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1 - \cos 8x}{2} - \frac{1 + \cos 12x}{2} = \sin(10x + \frac{\pi}{2})$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 10x + \cos 12x + \cos 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 10x + 2\cos 10x.\cos 2x = 0 \Leftrightarrow (\cos 2x + 1)\cos 10x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -1 \\ \cos 10x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \pi + 2k\pi \\ 10x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có 2 họ nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 2x + \cos 6x + \cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 5x.\cos 3x + 2\cos 5x.\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos 3x + \cos x)\cos 5x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x.\cos x.\cos 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 5x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

c. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1+\cos 8x}{2}=\frac{1-\cos 10x}{2}-\frac{1+\cos 12x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 12x+\cos 10x-\cos 8x-\cos 6x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 11x.\cos x-2\cos 7x.\cos x=0 \Leftrightarrow (\cos 11x-\cos 7x)\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos 11x=\cos 7x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ 11x=\pm 7x+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{9}\\ x=\frac{k\pi}{2}\end{array}\right., k\in\mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài tập 14.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1-\cos 6x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x+\cos 4x+\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2\cos 4x.\cos 2x+\cos 4x=0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos 2x+1)\cos 4x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x=0\\ \cos 2x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1-\cos 6x}{2}-\sin^2 2x-\frac{1-\cos 2x}{2}=0 \Leftrightarrow (\cos 6x-\cos 2x)+2\sin^2 2x=0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 4x.\sin 2x+2\sin^2 2x=0 \Leftrightarrow -2\sin 2x(\sin 4x-\sin 2x)=0$$

$$\Leftrightarrow -4\sin 2x.\cos 3x.\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \cos 3x=0\\ \sin x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \cos 3x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\end{array}\right., k\in\mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài tập 15.

a. $x=\pm\frac{\pi}{8}+k\pi, k\in\mathbf{Z}.$

b. $x=\frac{k\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}.$

c. $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$.

d. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách biến đổi sau cho vế trái:

Cách 1: Ta có:

$$VT = \sin^2 2x.\sin 2x.\cos 6x + \sin 6x.\cos 2x.\cos^2 2x$$
$$= (1 - \cos^2 2x).\sin 2x.\cos 6x + \sin 6x.\cos 2x.(1 - \sin^2 2x)$$
$$= \sin 2x.\cos 6x + \sin 6x.\cos 2x - $$
$$- \cos^2 2x.\sin 2x.\cos 6x - \sin 6x.\cos 2x.\sin^2 2x$$
$$= \sin 8x - \cos 2x.\sin 2x.(\cos 2x.\cos 6x + \sin 6x.\sin 2x)$$
$$= \sin 8x - \frac{1}{2}\sin 4x.\cos 4x = \sin 8x - \frac{1}{4}\sin 8x = \frac{3}{4}\sin 8x.$$

Cách 2: Ta có:

$$VT = \frac{1}{4}(3\sin 2x - \sin 6x)\cos 6x + \frac{1}{4}(3\cos 2x + \cos 6x)\sin 6x$$
$$= \frac{3}{4}(\sin 2x.\cos 6x + \cos 2x.\sin 6x) = \frac{3}{4}\sin 8x.$$

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$\frac{3}{4}\sin 8x = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \sin 8x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{4} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài tập 16.

a. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

b. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 17.

a. $x = k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 18.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos 2x + 1 + 2\cos^2 2x + \cos 6x + 1 - 3 = (2\sin 2x + 1)\cos 4x$$
$$\Leftrightarrow 2\cos 4x.\cos 2x + \cos 4x = (2\sin 2x + 1)\cos 4x$$
$$\Leftrightarrow (2\cos 2x + 1)\cos 4x = (2\sin 2x + 1)\cos 4x$$
$$\Leftrightarrow (\cos 2x - \sin 2x)\cos 4x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = 0$$
$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos 3x + \sin 7x = 1 - \cos(5x + \frac{\pi}{2}) - 1 - \cos 9x$$

$$\Leftrightarrow \cos 9x + \cos 3x + \sin 7x - \sin 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 6x.\cos 3x + 2\cos 6x.\sin x = 0 \Leftrightarrow (\cos 3x + \sin x)\cos 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 6x = 0\\ \cos 3x = \cos(x + \frac{\pi}{2})\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ 3x = \pm(x + \frac{\pi}{2}) + 2k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}\\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\end{array}\right. k \in \mathbb{Z}$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Bài tập 19. Biến đổi phương trình về dạng:

$$32\cos^6 x = 1 + \cos 6x \Leftrightarrow 32\left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right)^3 - \cos 6t = 1$$

$$\Leftrightarrow 4(1 + 3\cos 2t + 3\cos^2 2t + \cos^3 2t) - (4\cos^3 2t - 3\cos 2t) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2t + 5\cos 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2t = -1\\ \cos 2t = -\frac{1}{4} = \cos 2\alpha\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2t = \pi + 2k\pi\\ 2t = \pm 2\alpha + 2k\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ t = \alpha + k\pi\\ t = -\alpha + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ x + \frac{\pi}{4} = \alpha + k\pi\\ x + \frac{\pi}{4} = -\alpha + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \alpha - \frac{\pi}{4} + k\pi\\ x = -\alpha - \frac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right., k \in Z.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Bài tập 20. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ và $x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 21. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 22. $2\sqrt{5} - 4 < m < \frac{1}{2}$.

Bài tập 23. $\frac{1}{2} \le m \le 1$.

Bài tập 24.

a. Phương trình vô nghiệm.

b. $|m| > \frac{1}{8}$.

Bài tập 25. $m \ge \frac{1}{4}$.

Bài tập 26. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 27.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin^2x + \sin x + \cos^2x.\cos x = 0 \Leftrightarrow (\sin x + 1)\sin x + (1 - \sin^2x)\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + 1)[\sin x + (1 - \sin x)\cos x] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = -1 & (1) \\ \sin x + \cos x - \sin x.\cos x = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Giải (2): Đặt $\sin x + \cos x = t$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó phương trình có dạng:

$$t - \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 - \sqrt{2} \\ t = 1 + \sqrt{2} \text{ loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 - \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = \alpha + 2k\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$(2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) = 3 - 4(1 - \sin^2x)$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4) = 4\sin^2x - 1$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(3\cos 4x + 2\sin x - 4 - 2\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(3\cos 4x - 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -\dfrac{1}{2} \\ \cos 4x = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ 4x = 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Bài tập 28.

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách biến đổi sau:

Cách 1: Biến đổi phương trình về dạng:

$$2\sin^3x + 1 - 2\sin^2x - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^3x - 2\sin^2x - \sin x + 1 = 0$$

$\Leftrightarrow (\sin x - 1)(2\sin^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1)\cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 1\\ \cos 2x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$(2\sin^2 x - 1)\sin x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow -\cos 2x.\sin x + \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - 1)\cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 1\\ \cos 2x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$2\cos 2x.\sin x + 2\sin x.\cos x = 0 \Leftrightarrow (\cos 2x + \cos x)\sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos 2x = \cos(x + \pi)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ 2x = \pm(x + \pi) + 2k\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}.\\ x = \pi + 2k\pi\end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Bài tập 29.

a. Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}\left(\frac{1 - \cos x}{1 + \sin x} - 1\right) = 0$$

$\Leftrightarrow (1 + \cos x)(\cos x + \sin x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x + 1 = 0\\ \sin x = -\cos x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = -1\\ \text{tg}x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi + 2k\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Điều kiện:

$$\begin{cases}\sin x \neq 0\\ \cos x \neq -1\end{cases} \Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cot g^2 x = \frac{1+\sin x}{1+\cos x}$$

$$\frac{1-\sin^2 x}{1-\cos^2 x} = \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \Leftrightarrow \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\left(\frac{1-\sin x}{1-\cos x}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sin x)(\cos x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \sin x = \cos x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ tgx = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ x = \frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài tập 30.

a. Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x} = \frac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos x}{1-\sin x}\left(\frac{1+\cos x}{1+\sin x} - \frac{1+\cos x+\cos^2 x}{1+\sin x+\sin^2 x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)[(1+\cos x)(1+\sin x+\sin^2 x)+(1+\sin x)(1+\cos x+\cos^2 x)]=0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \cos x)(\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x + \sin x.\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}1-\cos x = 0 & (1)\\ \cos x - \sin x = 0 & (2)\\ \sin x + \cos x + \sin x.\cos x = 0 & (3)\end{array}\right.$$

Giải (1) và (2): Ta được:

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 1\\ tgx = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2k\pi\\ x = \frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}$$

Giải (3): Đặt $\sin x + \cos x = t$, điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \frac{t^2-1}{2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t + \frac{t^2-1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = -1+\sqrt{2}\\ t = -1-\sqrt{2} \text{ loại}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = \alpha + 2k\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} - \alpha + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có bốn họ nghiệm.

b. *Bạn đọc tự làm tương tự câu a).*

Bài tập 31.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$(1 + \cos x)\cos^2 x - 2(1 - \sin x) = 0 \Leftrightarrow (1 + \cos x)(1 - \sin^2 x) - 2(1 - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow [(1 + \cos x)(1 + \sin x) - 2](1 - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x + \sin x.\cos x - 1)(1 - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = 1 & (1) \\ \sin x + \cos x + \sin x.\cos x - 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): Ta được $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Giải (2): Đặt $\sin x + \cos x = t$, điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$, suy ra $\sin x.\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t + \frac{t^2 - 1}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \text{ loại} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin 3x - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2 x = \sin 3x - \sin x \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2 x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có ba họ nghiệm.

Bài tập 32.

a. $x = \pm\frac{\alpha}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ với $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$.

b. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + \alpha + 2k\pi$ và $x = \frac{5\pi}{4} - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ với $\sin\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

Bài tập 33.

a. $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ và $x = \frac{7-}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b. $x = k\pi$ và $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 34.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$3\sin3x - 4\sin^3 3x - \sqrt{3}\cos9x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin9x - \sqrt{3}\cos9x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin9x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos9x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin9x.\cos\frac{\pi}{3} - \cos9x.\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(9x - \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 9x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{9} \\ x = \frac{7\pi}{54} + \frac{2k\pi}{9} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

b. $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 35.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$(\sin x + \sin6x) + (\sin2x + \sin5x) + (\sin3x + \sin4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{7x}{2}.\cos\frac{5x}{2} + 2\sin\frac{7x}{2}.\cos\frac{3x}{2} + 2\sin\frac{7x}{2}.\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2})\sin\frac{7x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos\frac{3x}{2}.\cos x + \cos\frac{3x}{2})\sin\frac{7x}{2} = 0 \Leftrightarrow (2\cos x + 1).\cos\frac{3x}{2}.\sin\frac{7x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos\frac{3x}{2} = 0 \\ \sin\frac{7x}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{7x}{2} = k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \\ x = \frac{2k\pi}{7} \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có bốn họ nghiệm.

b. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{1}{2}(\cos 2x + \cos x)\cos x + \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos x)\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x.\cos x + \cos^2 x + \cos 2x.\sin x - \cos x.\sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x.\cos x + 1 - \sin^2 x + \cos 2x.\sin x - \cos x.\sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)\cos 2x - (\sin x + \cos x)\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos 2x - \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0 \\ \cos 2x - \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -\cos x \\ \cos 2x = \sin x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = -1 \\ \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Bài tập 36.

a. $x = \frac{k\pi}{3}, x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$ và $x = \alpha + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$ với $tg3\alpha = -3$.

b. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 37.

a. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. $x = \pi + 2k\pi, x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 38.

a. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = 2k\pi$ và $x = 2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 39.

a. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

b. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 40. *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 41.

a. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

b. $m \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \cup \{0\}$.

Bài tập 42. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\sin 2x + \sin 3x = m.\sin x \Leftrightarrow 2\sin x.\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x = m.\sin x$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 3 - 4\sin^2 x - m).\sin x = 0 \Leftrightarrow (4\cos^2 x + 2\cos x - m - 1).\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ 4\cos^2 x + 2\cos x - m - 1 = 0\end{array}\right. \underset{|t|\le 1}{\overset{t=\cos x}{\Leftrightarrow}} \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ 2t^2 + 2t - m - 1 = 0 \quad (1)\end{array}\right.$$

a. Với $m = -1$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 4t^2 + 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = 0\\ t = -\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = -\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Vậy, với $m = -1$, phương trình có ba họ nghiệm.

b. Để phương trình có nghiệm $x \ne k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \in (-1, 1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{(1) có 1 nghiệm thuộc } (-1,1)\\ \text{(1) có 2 nghiệm thuộc } (-1,1)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(-1).f(1) \le 0 \text{ (cần thử lại)}\\ \begin{cases}\Delta \ge 0\\ af(-1) > 0\\ af(1) > 0\\ -1 < \frac{S}{2} < 1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{4} \le m < 5.$$

Vậy, với $-\frac{5}{4} \le m < 5$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài tập 43. $1 < m < 3$.

Bài tập 44. $m < \frac{1}{2}$.

Bài tập 45. Giải phương trình:

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$\cos^4 x + \sin^6 x = \cos^2 x - \sin^2 x \Leftrightarrow \sin^6 x = (1 - \cos^2 x)\cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^6 x = \sin^2 x.\cos^2 x - \sin^2 x \Leftrightarrow \sin^6 x = (\cos^2 x - 1)\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^6 x + \sin^4 x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^6 x = 0\\ \sin^4 x = 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Viết lại phương trình dưới dạng:

$$\sin^2 x - \sin x.\sin^2 3x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = 0. \quad (1)$$

Coi (1) là phương trình bậc 2 theo sinx, ta có:

$$\Delta = \sin^4 3x - \sin^2 3x = (\sin^2 3x - 1)\sin^2 3x \le 0, \forall x$$

do đó, được chuyển thành hệ:

$$\begin{cases}\Delta = 0\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\sin^2 3x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin^2 3x = 1\\ \sin^2 3x = 0\end{array}\right.\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\sin^2 3x\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin^2 3x = 1\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin^2 3x = 0\\ \sin x = 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(3\sin x - 4\sin^3 x)^2 = 1\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}3\sin x - 4\sin^3 x = 0\\ \sin x = 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \dfrac{1}{2}\\ \sin x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\\ x = k\pi\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Cách 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$4\sin^2 x - 4\sin x.\sin^2 3x + \sin^4 3x - \sin^4 3x + \sin^2 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - \sin^2 3x)^2 + (1 - \sin^2 3x)\sin^2 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\sin x - \sin^2 3x = 0\\ (1 - \sin^2 3x)\sin^2 3x = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x = \dfrac{1}{2}\sin^2 3x\\ \left[\begin{array}{l}\sin^2 3x = 1\\ \sin^2 3x = 0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin^2 3x = 1\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin^2 3x = 0\\ \sin x = 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(3\sin x - 4\sin^3 x)^2 = 1\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}3\sin x - 4\sin^3 x = 0\\ \sin x = 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \dfrac{1}{2}\\ \sin x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\\ x = k\pi\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm.

Bài tập 46. $(\frac{\pi}{3} + (k + l)\pi, \frac{\pi}{3} + l\pi)$ và $(-\frac{\pi}{3} + l\pi, -\frac{\pi}{3} - (k - l)\pi)$, $k, l \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 47. $(\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + l\pi)$ và $(-\frac{\pi}{6} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + l\pi)$, $k, l \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 48. $(1, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ và $(-1, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 49.

a. $x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{5}, k \in \mathbf{Z}$.

b. Ta có nhận xét:

$\sin^4 x \le 1 \Rightarrow VP = 2 - \sin^4 x \ge 1$

$\begin{cases}\cos^3 x \le \cos^2 x\\ \sin^3 x \le \sin^2 x\end{cases} \Rightarrow VT = \cos^3 x + \sin^3 x \le \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

do đó, phương trình tương đương với hệ:

$$\begin{cases}VP = 1\\ VT = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^4 x = 1\\ \cos^3 x = \cos^2 x\\ \sin^3 x = \sin^2 x\end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm.

c. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d. Biến đổi phương trình về dạng:

$4\cos x - 2\cos 2x - (2\cos^2 2x - 1) = 1 \Leftrightarrow 2\cos x - (1 + \cos 2x)\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x - 2\cos^2 x.\cos 2x = 0 \Leftrightarrow (1 - \cos x.\cos 2x)\cos x = 0$

$\Leftrightarrow (2 - \cos 3x - \cos x)\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos x = 0 & (1)\\ \cos 3x + \cos x = 2 & (2)\end{array}\right.$

Giải (1): Ta được $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Giải (2): Ta có nhận xét:

$\begin{cases}\cos 3x \le 1\\ \cos x \le 1\end{cases} \Rightarrow VT = \cos 3x + \cos x \le 2$

do đó, phương trình (2) tương đương với hệ:

$$\begin{cases}\cos 3x = 1\\ \cos x = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4\cos^3 x - 3\cos x = 1\\ \cos x = 1\end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

Bài tập 50. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 51.

a. Điều kiện:

$$\begin{cases}\sin 3x \ne 0\\ \sin 2x \ne 0\\ \sin x \ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 3x \ne 0\\ \sin 2x \ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x \ne k\pi\\ 2x \ne k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \ne \frac{k\pi}{3}\\ x \ne \frac{k\pi}{2}\end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \quad (I)$$

Biến đổi phương trình về dạng:

$$\frac{\sin 5x}{\sin 3x.\sin 2x} + \frac{1}{\sin 3x.\sin 2x.\sin x} = 0 \Leftrightarrow \sin 5x.\sin x + 1 = 0. \quad (2)$$

Ta có:

$\begin{cases}|\sin 5x| \le 1\\ |\sin x| \le 1\end{cases} \Rightarrow |\sin 5x.\sin x| \le 1 \Rightarrow \sin 5x.\sin x \ge -1$

$\Leftrightarrow \sin 5x.\sin x + 1 \ge 0.$

Vậy, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\sin 5x.\sin x = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin 5x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 5x = -1 \\ \sin x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \cos x = 0 \text{ vi phạm (I).}$$

Vậy, phương trình vô nghiệm.

b. *Bạn đọc tự giải.*

Bài tập 52.

a. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

b. Ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \cos^{13} x \le \cos^2 x \\ \sin^{14} x \le \sin^2 x \end{cases} \Rightarrow VT = \cos^{13}x + \sin^{14}x \le \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

do đó, phương trình tương đương với hệ:

$$\begin{cases} \cos^{13} x = \cos^2 x \\ \sin^{14} x = \sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \pm 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = 2k\pi \end{array}\right., k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm.

c. $x = 2k\pi$ và $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

d. Ta có nhận xét:

$$\begin{cases} \cos^{2000} x \le \cos^2 x \\ \sin^{2000} x \le \sin^2 x \end{cases} \Rightarrow VT = \sin^{2000}x + \cos^{2000}x \le \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

do đó, phương trình tương đương với hệ:

$$\begin{cases} \cos^{2000} x = \cos^2 x \\ \sin^{2000} x = \sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos^2 x = 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, phương trình có một họ nghiệm.

Bài tập 53. $x = \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 54. Điều kiện:

$$\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \quad (*)$$

Ta có nhận xét:

$$|VT| = |(tgx + \frac{1}{4}cotgx)^n| = (|tgx| + \frac{1}{4}|cotgx|)^n \overset{Côsi}{\geq} (2\sqrt{\frac{1}{4}|tgx|.|cotgx|})^n = 1$$

$$\begin{cases}\cos^n x \leq \cos^2 x\\ \sin^n x \leq \sin^2 x\end{cases} \Rightarrow VT = \sin^n x + \cos^n x \leq \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

do đó, phương trình tương đương với hệ:

$$\left[\begin{array}{l}VT = VP = 1\\ VT = VP = -1\end{array}\right. \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases}VT = 1\\ n = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}tgx = \frac{1}{4}\cot gx\\ n = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}tg^2x = \frac{1}{4}\\ n = 2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}tgx = \pm\frac{1}{2} = \pm tg\alpha\\ n = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \pm\alpha + k\pi\\ n = 2\end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, phương trình có hai họ nghiệm và với $n = 2$.

Bài tập 55.

a. $x = 0$.

b. $x = 0$.

Bài tập 56.

a. $x = 0$.

b. $x = \frac{1}{2}$.

Bài tập 57.

a. *Bạn đọc tự giải.*

b. *Bạn đọc tự giải.*

c. $(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2l\pi)$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 58. Ta có kết quả:

- Với $m = \frac{1}{2}$, phương trình có nghiệm $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Với $m = -\frac{1}{2}$, phương trình có nghiệm $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Với $m \neq \pm\frac{1}{2}$, phương trình vô nghiệm.

Bài tập 59. $m = -1$ và $m = 0$.

Bài tập 60. $m = -2$.

CHỦ ĐỀ 4

HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

I. HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Bài toán 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x) \pm f(y) = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases},$$

với f(x) là một hàm số lượng giác của x.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta xét các hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases}, \quad \begin{cases} \cos x \pm \cos y = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases},$$

$$\begin{cases} tgx \pm tgy = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases}, \quad \begin{cases} \cot gx \pm \cot gy = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases}.$$

Ta chuyển tổng f(x) ± f(y) về dạng tích bằng việc sử dụng các công thức biến đổi tổng thành tích.

Chú ý: Phương pháp chung là nếu biết tổng x + y thì cần tìm hiệu x – y hay ngược lại, tức là:

- Ta đi biến đổi phương trình:

$$f(x) \pm f(y) = m \Leftrightarrow g_1(x + y).g_2(x - y) = m_1. \quad (*)$$

- Từ đó thay phương trình $x \pm y = \alpha$ vào (*) để tìm biểu thức còn lại.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{3}{2} \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}.$

- ❑ $(2k\pi, \frac{2\pi}{3} - 2k\pi)$ và $(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, - 2k\pi)$, $k \in Z$.
- ❑ $(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} - 2k\pi)$, $k \in Z$.
- ❑ $(\pi + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} - 2k\pi)$ và $(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \pi - 2k\pi)$, $k \in Z$.
- ❑ $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} - 2k\pi)$ và $(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} - 2k\pi)$, $k \in Z$.

b. $\begin{cases} tgx + tgy = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$.

❑ $(\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} - k\pi)$ và $(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} - k\pi), k \in Z$.

❑ $(\frac{\pi}{4} + k\pi, -k\pi)$ và $(k\pi, \frac{\pi}{4} - k\pi), k \in Z$.

❑ $(\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{\pi}{8} - k\pi), k \in Z$.

❑ $(\pi + k\pi, -\frac{3\pi}{4} - k\pi)$ và $(-\frac{3\pi}{4} + k\pi, \pi - k\pi), k \in Z$.

Bài tập 2. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 2m \\ x - y = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}.$$

a. Giải hệ với $m = \frac{1}{2}$.

❑ $(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi), k \in Z$. ❑ $(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, 2k\pi), k \in Z$.

❑ $(\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi), k \in Z$. ❑ $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi), k \in Z$.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

❑ $|m| \le \frac{1}{2}$. ❑ $|m| \ge 1$. ❑ $m \ge 0$. ❑ $0 \le m \le 1$.

Bài tập 3. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4} \\ 2\sin^2 x + 2\cos^2 y = 2m + 1 \end{cases}.$$

a. Giải hệ với m = 0.

❑ $(\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{\pi}{8} - k\pi), k \in Z$.

❑ $(\frac{3\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{2} - k\pi)$ và $(k\pi, \frac{\pi}{4} - k\pi), k \in Z$.

❑ $(\frac{\pi}{4} + k\pi, -k\pi)$ và $(k\pi, \frac{\pi}{4} - k\pi), k \in Z$.

❑ $(\pi + k\pi, -\frac{3\pi}{4} - k\pi)$ và $(-\frac{3\pi}{4} + k\pi, \pi - k\pi), k \in Z$.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

- ☐ $0 \le m \le 1$.
- ☐ $1 \le m \le 2$.
- ☐ $\frac{1-\sqrt{2}}{2} \le m \le \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.
- ☐ $\frac{1-\sqrt{2}}{2} \le m \le 0$.

Bài tập 4. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = a \\ tgx + tgy = b \end{cases}$$

a. Giải hệ khi $a = \frac{5\pi}{12}$ và $b = 2$.

- ☐ $(\frac{5\pi}{24} + k\pi, \frac{5\pi}{24} - k\pi), k \in Z$.
- ☐ $(\frac{5\pi}{12} + k\pi, - k\pi)$ và $(k\pi, \frac{5\pi}{12} - k\pi), k \in Z$.
- ☐ $(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{12} - k\pi)$ và $(\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{3} - k\pi), k \in Z$.
- ☐ $(\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{12} - k\pi)$ và $(-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{2} - k\pi), k \in Z$.

b. Tìm điều kiện giữa a và b để hệ có nghiệm.

Bài tập 5. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2\cos 6x - \cos 2y = m \\ 3x - 2y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

a. Giải hệ khi $m = -3$.

- ☐ $(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k\pi), k \in Z$.
- ☐ $(\frac{3\pi}{10} + \frac{2k\pi}{3}, -\frac{\pi}{5} + k\pi), k \in Z$.
- ☐ $(k\pi, -\frac{\pi}{4} + \frac{3k\pi}{2}), k \in Z$.
- ☐ $(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{\pi}{4} + k\pi), k \in Z$.

b. Xác định m để hệ có nghiệm.

- ☐ $-3 \le m \le 0$.
- ☐ $|m| \le 3$.
- ☐ $m \ge 0$.
- ☐ $-3 \le m \le \frac{33}{16}$.

Bài tập 6. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = m \\ x + y = 2\pi \end{cases}$.

b. $\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \cos\alpha \\ x + y = \alpha \end{cases}$.

Hướng dẫn:

a. Sử dụng công thức hạ bậc cho $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$.

b. Sử dụng công thức hạ bậc cho $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$.

Sau đó sử dụng các công thức biến đổi tổng thành tích.

Bài toán 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x).g(y) = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases},$$

với f(x) là một hàm số lượng giác của x.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta xét các hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x.\sin y = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases}, \begin{cases} \cos x.\cos y = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases},$$

$$\begin{cases} \sin x.\cos y = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases}, \begin{cases} tgx.tgy = m \\ x \pm y = \alpha \end{cases},$$

Ta chuyển tích f(x).g(y) về dạng tổng bằng việc sử dụng các công thức biến đổi tích thành tổng.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 7. Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \cos x.\cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \\ x + y = \dfrac{7\pi}{12} \end{cases}$.

❑ $(\frac{7\pi}{24} + k\pi, \frac{7\pi}{24} - k\pi), k \in Z$.

❑ $(\frac{7\pi}{12} + k\pi, -k\pi)$ và $(k\pi, \frac{7\pi}{12} - k\pi), k \in Z$.

❑ $(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{4} - k\pi)$ và $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} - k\pi), k \in Z$.

❑ $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{12} - k\pi)$ và $(\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{2} - k\pi), k \in Z$.

b. $\begin{cases} tgx.tgy = 3 \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$.

❑ $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} - k\pi)$ và $(\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{2} - k\pi), k \in Z$.

❑ $(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} - k\pi), k \in Z$.

❑ $(-\frac{\pi}{3} + k\pi, \pi - k\pi)$ và $(\pi + k\pi, -\frac{\pi}{3} - k\pi), k \in Z$.

❑ $(\frac{2\pi}{3} + k\pi, -k\pi)$ và $(k\pi, \frac{2\pi}{3} - k\pi), k \in Z$.

Bài tập 8. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x.\sin y = 2m \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}.$$

a. Giải hệ với m = 1.

❑ $(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} - k\pi), k \in Z$.

❑ Vô nghiệm.

❑ $(-\frac{\pi}{3} + k\pi, \pi - k\pi)$ và $(\pi + k\pi, -\frac{\pi}{3} - k\pi), k \in Z$.

❑ $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} - k\pi)$ và $(\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{2} - k\pi), k \in Z$.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

❑ $-1 \le m \le 2$. ❑ $|m| \le 1$. ❑ $m \ge 1$. ❑ $-\frac{1}{4} \le m \le \frac{3}{4}$.

Bài tập 9. Xác định m để hệ có nghiệm:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{3} \\ \cos x.\cos y = m \end{cases}.$$

❑ $1 \le m \le 2$. ❑ $|m| \le 2$. ❑ $m \ge -1$. ❑ $-\frac{1}{4} \le m \le \frac{3}{4}$.

Bài tập 10. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} tgx.tgy = m \\ x - y = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}.$$

a. Giải hệ với $m = \sqrt{3}$.

❑ $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi), k \in Z$. ❑ $(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}), k \in Z$.

❑ $(-\frac{\pi}{3} + k\pi, -\frac{\pi}{2} + k\pi), k \in Z$. ❑ $(\frac{\pi}{12} + k\pi, -\frac{\pi}{12} + k\pi), k \in Z$.

b. Tìm m để hệ có nghiệm.

Bài tập 11. Tìm điều kiện giữa a và b để hệ có nghiệm.

$$\begin{cases} x + y = a \\ \sin^2 x - \sin^2 y = b \end{cases}.$$

❑ $|b| \le \sin a$. ❑ $|b| \le \cos a$. ❑ $|b| \ge \sin a$. ❑ $|b| \ge \cos a$.

Bài tập 12. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = a \\ \sin x.\sin y = b \end{cases}.$$

Tìm b để hệ có nghiệm với mọi a. Tìm nghiệm đó.

Bài toán 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{f(x)}{f(y)} = m & (1) \\ x \pm y = \alpha & (2) \end{cases},$$

với f(x) là một hàm số lượng giác của x.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện cho $f(y) \neq 0$.

Bước 2: Biến đổi (1) dựa vào phương pháp luận hệ số để làm xuất hiện (2) và biểu thức còn lại.

Bước 3: Tìm nghiệm của hệ.

• BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 13. Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{2} \\ 12(x + y) = 5\pi \end{cases}$.

❑ $(\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{4} - k\pi), k \in Z$. ❑ $(\frac{5\pi}{24} + k\pi, \frac{5\pi}{24} - k\pi), k \in Z$.

❑ $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{6} - k\pi), k \in Z$. ❑ $(\frac{2\pi}{3} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi), k \in Z$.

b. $\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\cos y} = 2 \\ 3(x + y) = 5\pi \end{cases}$.

❑ $(\frac{5\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} - k\pi), k \in Z$. ❑ $(\frac{2\pi}{3} + k\pi, \pi - k\pi), k \in Z$.

❑ $(\pi + k\pi, \frac{2\pi}{3} - k\pi), k \in Z$. ❑ $(2k\pi, \frac{\pi}{3} - 2k\pi), k \in Z$.

Bài tập 14. Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} \dfrac{tgx}{tgy} = \sqrt{3} \\ x + y = \dfrac{7\pi}{12} \end{cases}$.

❑ $(\frac{7\pi}{12} + k\pi, k\pi), k \in Z$. ❑ $(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{4} - k\pi), k \in Z$.

❑ $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{12} - k\pi), k \in Z$. ❑ $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} - k\pi), k \in Z$.

b. $\begin{cases} \dfrac{\cot gx}{\cot gy} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$.

❑ $(\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} - k\pi), k \in Z.$ ❑ $(-\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{3\pi}{8} - k\pi), k \in Z.$

❑ $(\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{\pi}{8} - k\pi), k \in Z.$ ❑ $(\frac{3\pi}{8} + k\pi, -\frac{\pi}{8} - k\pi), k \in Z.$

II. CÁC HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÁC

Bài tập 15. Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \sin x.\cos y = \dfrac{1}{2} \\ \cos x.\sin y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

❑ $(\frac{\pi}{3} + (k+l)\pi, \frac{\pi}{3} + (k-l)\pi), k, l \in \mathbf{Z}.$

❑ $(\frac{\pi}{6} + (k+l)\pi, (k-l)\pi), k, l \in \mathbf{Z}.$

❑ $((k+l)\pi, \frac{\pi}{6} + (k-l)\pi), k, l \in \mathbf{Z}.$

❑ $(\frac{\pi}{4} + (k+\frac{1}{2})\pi, \frac{\pi}{4} + (k-\frac{1}{2})\pi), k, l \in \mathbf{Z}.$

b. $\begin{cases} \sin x.\sin y = -\dfrac{1}{4} \\ \cos x.\cos y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$.

❑ $(\frac{\pi}{2} + (k+l)\pi, (k-l)\pi)$ và $((k+l)\pi, \frac{\pi}{2} + (k-l)\pi), k, l \in \mathbf{Z}.$

❑ $(\frac{\pi}{4} + (k+l)\pi, -\frac{\pi}{4} + (k-l)\pi)$ và $(-\frac{\pi}{4} + (k+l)\pi, \frac{\pi}{4} + (k-l)\pi), k, l \in \mathbf{Z}.$

❑ $(\frac{\pi}{6} + (k+l)\pi, \frac{\pi}{6} + (k-l)\pi)$ và $(\frac{\pi}{6} + (k+l)\pi, \frac{\pi}{6} + (k-l)\pi), k, l \in \mathbf{Z}.$

❑ $(\frac{\pi}{6} + (k+l)\pi, -\frac{\pi}{6} + (k-l)\pi)$ và $(-\frac{\pi}{6} + (k+l)\pi, \frac{\pi}{6} + (k-l)\pi), k, l \in \mathbf{Z}.$

Bài tập 16. Giải các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{1}{2} \\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

- ❑ $(l\pi, \frac{\pi}{6} + 2(k-l)\pi)$ và $(l\pi, \frac{5\pi}{6} + 2(k-l)\pi)$, $k, l \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $(\frac{\pi}{6} + 2l\pi, (k-l)\pi)$ và $(\frac{5\pi}{6} + 2l\pi, (k-l)\pi)$, $k, l \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $(\frac{\pi}{6} + 2l\pi, \frac{\pi}{2} + (k-l)\pi)$ và $(\frac{5\pi}{6} + 2l\pi, \frac{\pi}{2} + (k-l)\pi)$, $k, l \in \mathbb{Z}$.
- ❑ $(\frac{\pi}{2} + 2l\pi, -\frac{\pi}{6} + 2(k-l)\pi)$ và $(-\frac{\pi}{6} + 2l\pi, \frac{\pi}{2} + 2(k-l)\pi)$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

b. $\begin{cases} \sin x = 7\cos y \\ \cos x - 5\sin y + 6 = 0 \end{cases}$.

- ❑ $(\frac{\pi}{2} + 2l\pi, \pi + 2k\pi)$, $k, l \in Z$.
- ❑ $(l\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k, l \in Z$.
- ❑ $(\frac{\pi}{2} + l\pi, k\pi)$, $k, l \in Z$.
- ❑ $(\pi + 2l\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k, l \in Z$.

Bài tập 17. Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} + a \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2} - a \end{cases}$.

- ❑ $(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2l\pi)$, $k, l \in Z$ và $a = 0$.
- ❑ $(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{\pi}{4} + 2l\pi)$, $k, l \in Z$ và $a = 0$.
- ❑ $(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2l\pi)$, $k, l \in Z$ và a tuỳ ý.
- ❑ $(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2l\pi)$, $k, l \in Z$ và $a = 0$.

b. $\begin{cases} \sin^2 x - 2\sin x.\cos 2y = \cos\dfrac{x+y}{2} + \cos\dfrac{x-y}{2} + 2 \\ \cos^2 2y + \dfrac{1}{2}(\cos x + \cos y) - 1 = 0 \end{cases}$

- ❑ $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2l\pi)$, $k, l \in Z$.
- ❑ $(\frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + 2l\pi)$ $k, l \in Z$.
- ❑ $(-\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{3\pi}{4} + 2l\pi)$, $k, l \in Z$.
- ❑ $(-\frac{3\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + 2l\pi)$, $k, l \in Z$.

Bài tập 18. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \cos x.\cos y = m + 1 \\ \sin x.\sin y = 4m^2 + 2m \end{cases}$$

a. Giải hệ trên khi $m = -\frac{1}{4}$.

- ❑ $(\frac{\pi}{2} + (k+l)\pi, (k-l)\pi)$ và $((k+l)\pi, \frac{\pi}{2} + (k-l)\pi)$, $k, l \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $(\frac{\pi}{4} + (k+l)\pi, -\frac{\pi}{4} + (k-l)\pi)$ và $(-\frac{\pi}{4} + (k+l)\pi, \frac{\pi}{4} + (k-l)\pi)$, $k, l \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $(\frac{\pi}{6} + (k+l)\pi, \frac{\pi}{6} + (k-l)\pi)$ và $(\frac{\pi}{6} + (k+l)\pi, \frac{\pi}{6} + (k-l)\pi)$, $k, l \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $(\frac{\pi}{6} + (k+l)\pi, -\frac{\pi}{6} + (k-l)\pi)$ và $(-\frac{\pi}{6} + (k+l)\pi, \frac{\pi}{6} + (k-l)\pi)$, $k, l \in \mathbf{Z}$.

b. Xác định m để hệ có nghiệm.

- ❑ $-\frac{3}{4} \le m \le 0$ hoặc $m = 1$.
- ❑ $\frac{1}{4} \le m \le \frac{3}{4}$ hoặc $m = 0$.
- ❑ $-\frac{1}{4} \le m \le 0$ hoặc $m = -1$.
- ❑ $-\frac{3}{4} \le m \le -\frac{1}{4}$ hoặc $m = 0$.

Bài tập 19. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} tgx + tgy = a \\ tg(x + y) = b \end{cases}.$$

a. Giải hệ khi $a = \sqrt{3} + 1$, $b = -(2 + \sqrt{3})$.

- ❑ $(k\pi, \frac{\pi}{4} + l\pi)$ và $(\frac{\pi}{4} + k\pi, l\pi)$, $k, l \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $(\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{4} + l\pi)$ và $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{6} + l\pi)$, $k, l \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + l\pi)$ và $(\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + l\pi)$, $k, l \in \mathbf{Z}$.
- ❑ $(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{4} + l\pi)$ và $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} + l\pi)$, $k, l \in \mathbf{Z}$.

b. Tìm điều kiện giữa a và b để hệ có nghiệm.

- ❑ $a^2b + 4a - 4b \ge 0$.
- ❑ $a^2b^2 + ab \ge 0$.
- ❑ $a^2b^2 + a - b \ge 0$.
- ❑ $a - b \ge 0$.

Bài tập 20. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \cos x.\cos y = b \end{cases}.$$

a. Giải hệ khi $a = 1$, $b = \frac{3}{4}$.

b. Tìm điều kiện giữa a và b để hệ có nghiệm

Bài tập 21. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sin 2x + \sin 2y = 1 \\ \sin^2 x + \sin^2 y = m \end{cases}.$$

a. Giải hệ trên khi $m = \dfrac{3}{2}$.

b. Xác định m để hệ có nghiệm.

Bài tập 22. Xác định m để các hệ phương trình sau có nghiệm:

a. $\begin{cases} \cos x = m\cos^3 y \\ \sin x = m\sin^3 y \end{cases}$.

❑ $0 \le m \le 2$. ❑ $-2 \le m \le -1$. ❑ $1 \le m \le 2$. ❑ $1 \le |m| \le 2$.

b. $\begin{cases} \sin^2 x + m\,\mathrm{tg}y = m \\ \mathrm{tg}^2 y + m\sin x = m \end{cases}$.

❑ $m \ge 0$. ❑ $m \le 0$. ❑ $1 \le m \le 2$. ❑ $0 \le m \le 1$.

Bài tập 23. Xác định m để các hệ phương trình sau có nghiệm:

a. $\begin{cases} \cos x + m\cos y = 1 \\ \sin x + m\sin y = 1 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} \sin x + \sin 2y = 1 \\ \cos x = m(\sin y + \cos y) \end{cases}$.

c. $\begin{cases} \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y = m \\ \cos 2x + \cos 2y = 1 \end{cases}$.

d. $\begin{cases} \sin 2x + \sin 2y = 1 \\ \cos^2 x + \cos^2 y = m \end{cases}$.

Bài tập 24. Xác định m để hệ sau có nghiệm (x, y) thoả mãn $x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ và $y \in (0, \pi)$:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = m - 1 \\ \cos 2x + \cos 2y = 2m^2 - 2 \end{cases}.$$

❑ $\dfrac{1}{2} < m < \dfrac{5}{2}$. ❑ $\dfrac{1}{2} < m < 1$. ❑ $\dfrac{3}{2} < m < \dfrac{5}{2}$. ❑ $\dfrac{1}{2} < m < \dfrac{3}{2}$.

Bài tập 25. Tìm a để hệ có nghiệm duy nhất:

a. $\begin{cases} a(|x| + 1) = y + \cos x \\ |\sin x| + y^2 = 1 \end{cases}$.

❑ $a = 0$. ❑ $a = 1$. ❑ $a = 2$. ❑ $a = 3$.

b. $\begin{cases} ax^2 + a = y + |\cos x| \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$.

❑ $a = 0$. ❑ $a = 1$. ❑ $a = 2$. ❑ $a = 3$.

Bài tập 26. Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} \sin \pi x . \cos \pi y = \dfrac{1}{4} \\ 3\mathrm{tg}\pi x = \mathrm{tg}\pi y \end{cases}$, $0 < x + y < 2$.

b. $\begin{cases} \sin \pi x . \sin \pi y = \dfrac{3}{4} \\ \mathrm{tg}\pi x . \mathrm{tg}\pi y = 3 \end{cases}$.

Bài tập 27. Giải và biện luận các hệ phương trình:

a. $\begin{cases}\cos x = \cos^2 y\\ \sin x = a\sin y\end{cases}$.   b. $\begin{cases}\sin x + \sin y = 2\sin\alpha\\ \cos^2 x + \cos^2 y = 2\sin^2\alpha\end{cases}$.

Bài tập 28. Giải và biện luận các hệ phương trình:

a. $\begin{cases}\cos x = m\cos 2y\\ \cos y = m\cos 2x\end{cases}$.   b. $\begin{cases}\sin^2 x + \sin^2 y = a\\ tg(x+y)tg(x-y) = a-1\end{cases}$.

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1:

a. $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} - 2k\pi)$ và $(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} - 2k\pi)$, $k \in Z$.

b. $(\frac{\pi}{4} + k\pi, -k\pi)$ và $(k\pi, \frac{\pi}{4} - 2k\pi)$, $k \in Z$.

Bài tập 2: Kí hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1) và (2).

Biến đổi (1) về dạng:

$$2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2} = 2m \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{\pi}{3} = m \Leftrightarrow \cos\frac{x+y}{2} = 2m \quad (3)$$

a. Với $m = \frac{1}{2}$, ta được:

$$(3) \Leftrightarrow \cos\frac{x+y}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} = 2k\pi \Leftrightarrow x + y = 4k\pi,\ k \in Z.$$

Do đó, hệ tương đương với:

$$\begin{cases}x + y = 4k\pi\\ x - y = \frac{2\pi}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\\ y = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\end{cases},\ k \in Z.$$

Vậy, với $m = \frac{1}{2}$ hệ có một cặp họ nghiệm.

b. Hệ có nghiệm

$$\Leftrightarrow (3) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow |2m| \le 1 \Leftrightarrow |m| \le \frac{1}{2}.$$

Vậy, với $|m| \le \frac{1}{2}$ hệ có nghiệm.

Bài tập 3: Kí hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1) và (2).

Biến đổi (2) về dạng:

$$1 - \cos 2x + 1 + \cos 2y = 2m + 1 \Leftrightarrow \cos 2x - \cos 2y = 1 - 2m$$

$$\Leftrightarrow -2\sin(x - y).\sin(x + y) = 1 - 2m$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} -2\sin(x - y).\sin\frac{\pi}{4} = 1 - 2m \Leftrightarrow \sin(x - y) = \frac{2m-1}{\sqrt{2}}.(3)$$

a. Với m = 0, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \sin(x - y) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \left[\begin{array}{l} x - y = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x - y = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \;\&\; y = \frac{\pi}{4} - k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \;\&\; y = -\frac{\pi}{2} - k\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy, với m = 0 hệ có hai cặp họ nghiệm.

b. Hệ có nghiệm khi:

$$(3) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow \left|\frac{2m-1}{\sqrt{2}}\right| \le 1 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{2}}{2} \le m \le \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy, hệ có nghiệm khi $\frac{1-\sqrt{2}}{2} \le m \le \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Bài tập 4: Kí hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1) và (2).

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \ne 0 \\ \cos y \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y \ne \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$$

Biến đổi (1) về dạng:

$$\frac{\sin(x + y)}{\cos x.\cos y} = b \Leftrightarrow \sin(x + y) = \frac{b}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} b\cos(x - y) = 2\sin a - b\cos a. \qquad (3)$$

a. Với $a = \frac{5\pi}{12}$ và b = 2, ta được:

$$(3) \Leftrightarrow \cos(x - y) = \sin\frac{5\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12} = \sqrt{2}\sin(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - y = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Do đó, hệ tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x - y = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\\ x + y = \dfrac{5\pi}{12}\end{cases}\\ \begin{cases}x - y = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\\ x + y = \dfrac{5\pi}{12}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi\\ y = \dfrac{\pi}{12} - k\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi\\ y = \dfrac{\pi}{3} - k\pi\end{cases}\end{array}\right., k \in \mathbf{Z}$$

Vậy, với $a = \dfrac{5\pi}{12}$ và $b = 2$ hệ có hai cặp họ nghiệm.

b. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $b = 0$ thì:

$$(3) \Leftrightarrow \sin a = 0 \Leftrightarrow a = k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, trong trường hợp này ta có kết luận:

- Với $a = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ và $b = 0$ hệ có nghiệm $(x_0, a - x_0)$ với $x_0 \neq \dfrac{\pi}{2} + l\pi, l \in \mathbb{Z}$.
- Với $a \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$ và $b = 0$ hệ vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $b \neq 0$ thì:

$$(3) \Leftrightarrow \cos(x - y) = \frac{2}{b}\sin a - \cos a. \quad (4)$$

Khi đó, hệ có nghiệm khi và chỉ khi:

$$(4) \text{ có nghiệm và } \sin a \neq 0 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2}{b}\sin a - \cos a \leq 1.$$

Bài tập 5: Kí hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1) và (2).

Thay (2) vào (1) ta được:

$$2\cos(\pi + 4y) - \cos 2y = m \Leftrightarrow -2(2\cos^2 2y - 1) - \cos 2y = m$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2y + \cos 2y + m - 2 = 0.$$

Đặt $t = \cos 2y$, điều kiện $|t| \leq 1$ ta được:

$$4t^2 + t + m - 2 = 0. \quad (3)$$

a. Với $m = -3$ ta được:

$$(3) \Leftrightarrow 4t^2 + t - 5 = 0 \overset{|t|\leq 1}{\Leftrightarrow} t = 1 \Leftrightarrow \cos 2y = 1 \Leftrightarrow 2y = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow y = k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, với $m = -3$ hệ có một cặp họ nghiệm.

b. *Hướng dẫn*: Hệ có nghiệm:

$$\Leftrightarrow \text{(3) có nghiệm } |t| \le 1 \Leftrightarrow -3 \le m \le \frac{33}{16}.$$

Bài tập 6: *Bạn đọc tự làm.*

Bài tập 7:

a. $(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{4} - k\pi)$ và $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} - k\pi)$, $k \in Z$.

b. $(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} - k\pi)$, $k \in Z$.

Bài tập 8: Kí hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1) và (2).

Biến đổi (1) về dạng:

$$\frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)] = 2m \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \cos(x-y) - \cos\frac{2\pi}{3} = 4m$$

$$\Leftrightarrow \cos(x-y) = \frac{4m-1}{2}. \quad (3)$$

a. Với m = 1, ta được:

$$(3) \Leftrightarrow \cos(x-y) = \frac{3}{2} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, với m = 1 hệ vô nghiệm.

b. Hệ có nghiệm khi:

$$\text{(3) có nghiệm} \Leftrightarrow \left|\frac{4m-1}{2}\right| \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le m \le \frac{3}{4}.$$

Vậy, với $-\frac{1}{4} \le m \le \frac{3}{4}$ hệ có nghiệm.

Bài tập 9: $-\frac{1}{4} \le m \le \frac{3}{4}$.

Bài tập 10: Kí hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1) và (2).

Điều kiện:

$$\begin{cases} \cos x \ne 0 \\ \cos y \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \\ y \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \quad (*)$$

Biến đổi (1) về dạng:

$$\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = m$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)] = \frac{m}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \cos\frac{\pi}{6} - \cos(x+y) = m[\cos(x+y) + \cos\frac{\pi}{6}]$$

$$\Leftrightarrow (m+1)\cos(x+y) = \frac{\sqrt{3} - m}{2}. \quad (3)$$

a. Với $m = \sqrt{3}$, khi đó (3) có dạng:

$$(\sqrt{3}+1)\cos(x+y) = 0 \Leftrightarrow \cos(x+y) = 0 \Leftrightarrow x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Do đó, hệ tương đương với:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x - y = \dfrac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2} \\ y = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbf{Z}.$$

Vậy, với $m = \sqrt{3}$ hệ có một cặp họ nghiệm.

b. Ta xét hai trường hợp:

- Với $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$, khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow 0 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \text{ vô lí} \Rightarrow \text{hệ vô nghiệm.}$$

- Với $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$
  Khi đó:

$$(3) \Leftrightarrow \cos(x+y) = \frac{\sqrt{3}-m}{2(m+1)}. \quad (4)$$

Hệ có nghiệm trước hết cần:

$$(4) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{3}-m}{2(m+1)}\right| \leq 1.$$

Bạn đọc làm tiếp với lưu ý điều kiện (*).

Bài tập 11: $|b| \leq \sin a$.

Bài tập 12: Hệ có nghiệm với mọi a khi b = 0 và khi đó nghiệm của hệ là:

$$(k\pi, a - k\pi) \text{ và } (a - k\pi, k\pi), k \in \mathbf{Z}.$$

Bài tập 13:

a. $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{6} - k\pi), k \in Z.$

b. Kí hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1) và (2).

Điều kiện $\cos y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$

Biến đổi (1) về dạng:

$$\cos x = 2\cos y \Leftrightarrow 2\cos x = 4\cos y \Leftrightarrow 3(\cos x - \cos y) = \cos x + \cos y$$

$$\Leftrightarrow -6\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2} = 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} 3\sin\frac{5\pi}{6}.\sin\frac{x-y}{2} + \cos\frac{5\pi}{6}.\cos\frac{x-y}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\frac{x-y}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x - y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Do đó, hệ tương đương với:

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x + y = \dfrac{5\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k\pi \\ y = \dfrac{2\pi}{3} - k\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z}.$$

Bài tập 14:

a. $(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{4} - k\pi), k \in Z$.

b. Kí hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1) và (2).

Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \sin y \neq 0 \\ \cot gy \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \sin 2y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ y \neq \dfrac{l\pi}{2} \end{cases}, k, l \in \mathbf{Z}.$$

Biến đổi (1) về dạng:

$$\frac{\cos x.\sin y}{\cos y.\sin x} = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \Leftrightarrow \text{sinx.cosy} - \text{siny.cosx} = \sqrt{2}\ (\text{sinx.cosy} + \text{siy.cosx})$$

$$\Leftrightarrow \sin(x-y) = \sqrt{2}\sin(x+y) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \sin(x-y) = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x-y) = 1 \Leftrightarrow x - y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

Do đó, hệ tương đương với:

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{8} - k\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z}.$$

Bài tập 15:

a. Biến đổi tương đương hệ bằng cách cộng và trừ vế với vế hai phương trình đã cho, ta được:

$$\begin{cases} \sin x.\cos y + \cos x.\sin y = 1 \\ \sin x.\cos y - \cos x.\sin y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = 1 \\ \sin(x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x - y = l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + (k + \dfrac{1}{2})\pi \\ y = \dfrac{\pi}{4} + (k - \dfrac{1}{2})\pi \end{cases}, k, l \in \mathbf{Z}.$$

b. $(\frac{\pi}{6} + (k+l)\pi, -\frac{\pi}{6} + (k-l)\pi)$ và $(-\frac{\pi}{6} + (k+l)\pi, \frac{\pi}{6} + (k-l)\pi)$, $k, \in \mathbf{Z}$.

Bài tập 16:

a. Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} 2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \\ 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{tg}\frac{x+y}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z.$$

$$\Leftrightarrow x + y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}. \quad (1)$$

Vậy hệ tương đương với:

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ \sin x + \sin(\frac{\pi}{3} - x + 2k\pi) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ \sin x + \sin(\frac{\pi}{3} - x) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ 2\sin\frac{\pi}{6}.\cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2l\pi \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} - x + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -\frac{\pi}{6} + 2(k-l)\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + 2(k-l)\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi \end{cases} \end{array}\right., k, l \in \mathbf{Z}.$$

b. Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} \sin x = 7\cos y \\ \cos x = 5\sin y - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 49\cos^2 y \\ \cos^2 x = (5\sin y - 6)^2 \end{cases}$$

$$\overset{+}{\Rightarrow} 1 = 49\cos^2 y + 25\sin^2 y - 60\sin y + 36 \Leftrightarrow 24\sin^2 y + 60\sin y - 84 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin y = 1 \\ \sin y = -\frac{7}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}. \quad (3)$$

Thay (3) vào hệ, tả được:

$$\begin{cases} \sin x = 7\cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \\ \cos x = 5\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \doteq 0 \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + 2l\pi, l \in \mathbf{Z}.$$

Vậy nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x = \pi + 2l\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}, k, l \in \mathbf{Z}.$$

Bài tập 17:

a. Bằng cách cộng theo vế hai phương trình của hệ, ta được:

$$(\sin x + \cos x) + (\sin y + \cos y) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) + \sin(y + \frac{\pi}{4}) = 2$$

$$\overset{\sin\alpha \le 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \\ \sin(y + \frac{\pi}{4}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ y + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ y = \frac{\pi}{4} + 2l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbf{Z}$$

Thử lại nghiệm trên vào hệ ta thấy nó chỉ đúng khi $a = 0$.

Vậy, với $a = 0$ hệ có một cặp họ nghiệm.

b. $(-\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{3\pi}{4} + 2l\pi), k, l \in Z.$

Bài tập 18:

a. $(\frac{\pi}{6} + (k + l)\pi, -\frac{\pi}{6} + (k - l)\pi)$ và $(-\frac{\pi}{6} + (k + l)\pi, \frac{\pi}{6} + (k - l)\pi), k, l \in \mathbf{Z}.$

b. $-\frac{3}{4} \le m \le -\frac{1}{4}$ hoặc $m = 0$.

Bài tập 19:

a. $(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{4} + l\pi)$ và $(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{3} + l\pi), k, l \in \mathbf{Z}.$

b. $a^2b + 4a - 4b \ge 0$.

Bài tập 20:

a. Với $a = 1, b = \frac{3}{4}$ hệ phương trình có bốn cặp họ nghiệm sau:

$(\frac{\pi}{6} + 2(k + l)\pi, \frac{\pi}{6} + 2(k - l)\pi);$

$(\frac{5\pi}{6} + 2(k + l)\pi, \frac{5\pi}{6} + 2(k - l)\pi);$

$(\frac{7\pi}{6} + (2k + 2l + 1)\pi, \frac{7\pi}{6} + (2k - 2l - 1)\pi);$

$(-\frac{\pi}{6} + (2k + 2l + 1)\pi, -\frac{\pi}{6} + (2k - 2l - 1)\pi), k, l \in \mathbf{Z}.$

b. Hệ phương trình có nghiệm khi $a^2 \le 4(1 - |b|)$.

Bài tập 21: Hệ phương trình có nghiệm khi $1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \le m \le 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài tập 22:

a. Ta thực hiện phép biến đổi:

$$\begin{cases}\cos^2 x = m^2.\cos^6 y\\ \sin^2 x = m^2.\sin^6 y\end{cases} \Rightarrow \sin^2x + \cos^2x = m^2(\sin^6y + \cos^6y)$$

$$\Leftrightarrow 1 = m^2[(\sin^2y + \cos^2y)^3 - 3(\sin^2y + \cos^2y)\sin^2y.\cos^2y]$$

$$\Leftrightarrow 1 = m^2(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2y) \Leftrightarrow 3m^2.\sin^2 2y = 4(m^2 - 1). \quad (1)$$

Để hệ có nghiệm trước hết (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0\\ \left|\dfrac{4(m^2-1)}{3m^2}\right| \le 1\end{cases} \Leftrightarrow 1 \le |m| \le 2.$$

Với $1 \le |m| \le 2$, giả sử (1) có nghiệm y_0, tức là:

$$3m^2.\sin^2 2y_0 = 4(m^2 - 1) \Leftrightarrow m^2(\sin^6y_0 + \cos^6y_0) = 1$$

$$\Leftrightarrow (m.\sin^3y_0)^2 + (m.\cos^3y_0)^2 = 1$$

tức là hệ (I) luôn có nghiệm x_0.

Vậy, với $1 \le |m| \le 2$ hệ đã cho có nghiệm.

b. $m \ge 0$.

Bài tập 23:

a. $|m| \le 2\sqrt{2}$ và $m \neq 0$.

b. $|m| \le \sqrt{3} - 1$.

c. $|m| \le \dfrac{2}{\sqrt{3}} - 1$.

Bài tập 24: $\dfrac{1}{2} < m < \dfrac{5}{2}$.

Bài tập 25:

a. $\begin{cases} a(|x|+1) = y + \cos x\\ |\sin x| + y^2 = 1\end{cases}$.

Điều kiện cần: Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì hệ cũng có nghiệm $(-x_0, y_0)$. Khi đó để hệ có nghiệm duy nhất là

$$x_0 = -x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0. \quad (*)$$

Với $x_0 = 0$, thay vào hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} a = y + 1\\ y^2 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = y + 1\\ y = \pm 1\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0\\ a = 2\end{array}\right.$$

Điều kiện đủ: Ta lần lượt xét với hai giá trị tìm được của a.

a. Với a = 0 hệ có dạng:

$$\begin{cases} 0 = y + \cos x\\ |\sin x| + y^2 = 1\end{cases},$$

hệ có vô số nghiệm dạng:

$$\begin{cases}\cos x = -1\\ y = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \pi + 2k\pi\\ y = 1\end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy a = 0 không thoả mãn.

b. Với a = 2 hệ có dạng:

$$\begin{cases}2(|x|+1) = y + \cos x & (1)\\ |\sin x| + y^2 = 1 & (2)\end{cases}$$

Khi đó ta lần lượt có các đánh giá sau:

- Từ (1) suy ra VT ≥ 2 và kết hợp với $-1 \leq \cos x \leq 1$ ta được $y \geq 1$.
- Từ (2) suy ra $y \leq 1$.

Vậy, hệ tương đương với:

$$\begin{cases}y = 1\\ 2(|x|+1) = 1 + \cos x\\ |\sin x| + 1 = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 1\\ 2(|x|+1) = 1 + \cos x\\ \sin x = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 0\\ y = 1\end{cases}$$

là nghiệm duy nhất của hệ.

Vậy, với a = 2 hệ có nghiệm duy nhất.

b. a = 2.

PHỤ LỤC

PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HOÁ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Các bài toán:

1. Đại số sơ cấp như:
   a. Chứng minh đẳng thức
   b. Chứng minh bất đẳng thức
   c. Giải phương trình
   d. Giải bất phương trình
   e. Giải hệ phương trình và hệ bất phương trình
2. Hàm số, như tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất
3. Tính nguyên hàm và tích phân
4. Hình học, như tìm điểm thuộc đường tròn, Elíp, Hypebol thoả mãn điều kiện cho trước, tam giác nội tiếp và các bài toán tiếp tuyến

trong một số trường hợp ta có thể chuyển chúng thành các bài toán lượng giác để thực hiện, công việc này được gọi là phương pháp lượng giác hoá.

Việc lựa chọn phương pháp lượng giác hoá cho bài toán được xác định thông qua các dấu hiệu đặc biệt của các biến có mặt trong bài toán và các dấu hiệu đó lại được xác định thông qua miền giá trị của chúng cùng với các công thức lượng giác thông thường.

Ta có các dấu hiệu:

1. Nếu có điều kiện của biến x là $|x| \le a$ $(a \ge 0)$, ta có thể đặt:

$$x = a.\sin t, \text{ với } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ hoặc } x = a.\cos t, \text{ với } t \in [0, \pi].$$

Trong trường hợp riêng:

- Nếu $0 \le x \le a$, ta có thể đặt

$$x = a.\sin t, \text{ với } t \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ hoặc } x = a.\cos t, \text{ với } t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

- Nếu $-a \le x \le 0$, ta có thể đặt

$$x = a.\sin t, \text{ với } t \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \text{ hoặc } x = a.\cos t, \text{ với } t \in [\frac{\pi}{2}, \pi].$$

2. Nếu có điều kiện của biến x là $|x| \ge a$ $(a \ge 0)$, ta có thể đặt:

$$x = \frac{a}{\sin t}, \text{ với } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$$

$$\text{hoặc } x = \frac{a}{\cos t}, \text{ với } t \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}.$$

3. Nếu biến $x \in \mathbf{R}$, ta có thể đặt:

$$x = \text{tg}t, \text{ với } t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ hoặc } x = \text{cotg}t, \text{ với } t \in (0, \pi).$$

Trong trường hợp riêng:

- Nếu $x \geq 0$, ta có thể đặt

$$x = \text{tg}t, \text{ với } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ hoặc } x = \text{cotg}t, \text{ với } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

- Nếu $x \leq 0$, ta có thể đặt

$$x = \text{tg}t, \text{ với } t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right] \text{ hoặc } x = \text{cotg}t, \text{ với } t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

4. Nếu hai biến x, y thoả mãn điều kiện $a^2.x^2 + b^2.y^2 = c^2$, với a, b, c > 0, ta được:

$$\left(\frac{ax}{c}\right)^2 + \left(\frac{by}{c}\right)^2 = 1.$$

Do đó, chọn phép đặt:

$$\begin{cases} \dfrac{ax}{c} = \sin t \\ \dfrac{by}{c} = \cos t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{c.\sin t}{a} \\ y = \dfrac{c.\cos t}{b} \end{cases} \text{ với } t \in [0, 2\pi].$$

Trong trường hợp này nếu cần sử dụng tới dấu của x và y ta có thể hạn chế góc t, ví dụ nếu có x, y > 0 thì $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

5. Các biểu thức thường được lượng giác hoá:

Biểu thức	Cách lượng giác hoá biểu thức
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x = \lvert a \rvert \sin t \text{ với } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ x = \lvert a \rvert \cos t \text{ với } 0 \leq t \leq \pi \end{array}\right.$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\lvert a \rvert}{\sin t} \text{ với } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \\ x = \dfrac{\lvert a \rvert}{\cos t} \text{ với } t \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \end{array}\right.$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\left[\begin{array}{l} x = \lvert a \rvert \text{tg}t \text{ với } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ x = \lvert a \rvert \text{cotg}t \text{ với } 0 < t < \pi \end{array}\right.$
$\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$	$x = a\cos 2t$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x = a + (b-a)\sin^2 t$
$\dfrac{a+b}{1-ab}$	$\begin{cases} a = \text{tg}\alpha \\ b = \text{tg}\beta \end{cases}$, với $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

II. PHƯƠNG PHÁP THỰC HIỆN VÀ BÀI TẬP

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Lượng giác hoá bài toán.

Bước 2: Thực hiện bài toán trong môi trường lượng giác.

BÀI TẬP TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM

Bài tập 1. Cho $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$ và $0 < a, b, c < 1$.

a. Lựa chọn việc lượng giác hoá cho biểu thức là:

- ☐ $a = \sin\alpha, b = \sin\beta, c = \sin\gamma$.
- ☐ $a = tg\alpha, b = tg\beta, c = tg\gamma$.
- ☐ $a = \cos\alpha, b = \cos\beta, c = \cos\gamma$.
- ☐ Lựa chọn khác.

b. Chứng minh rằng:

$$abc + 1 = c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} + a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)}.$$

Bài tập 2. Cho $a + b + c = abc$.

a. Lựa chọn việc lượng giác hoá cho biểu thức là:

- ☐ $a = \sin\alpha, b = \sin\beta, c = \sin\gamma$.
- ☐ $a = tg\alpha, b = tg\beta, c = tg\gamma$.
- ☐ $a = \cos\alpha, b = \cos\beta, c = \cos\gamma$.
- ☐ Lựa chọn khác.

b. Chứng minh rằng:

$$\frac{3a-a^3}{1-3a^2} + \frac{3b-b^3}{1-3b^2} + \frac{3c-c^3}{1-3c^2} = \frac{3a-a^3}{1-3a^2}.\frac{3b-b^3}{1-3b^2}.\frac{3c-c^3}{1-3c^2}.$$

Bài tập 3. Cho $ab + bc + ca = 1$.

a. Lựa chọn việc lượng giác hoá cho biểu thức là:

- ☐ $a = \sin A, b = \sin B, c = \sin C$.
- ☐ $a = tgA, b = tgB, c = tgC$.
- ☐ $a = \cos A, b = \cos B, c = \cos C$.
- ☐ Lựa chọn khác.

b. Chứng minh rằng:

$$a + b + c - 3abc = a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2).$$

Bài tập 4. Nếu x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình:

$$x^3 + ax^2 + x + b = 0 \ (b \neq 0).$$

Chứng minh rằng

$$(x_1 - \frac{1}{x_1})(x_2 - \frac{1}{x_2}) + (x_2 - \frac{1}{x_2})(x_3 - \frac{1}{x_3}) + (x_3 - \frac{1}{x_3})(x_1 - \frac{1}{x_1}) = 4.$$

Bài tập 5. Cho $|a| \le 1$.

a. Lựa chọn việc lượng giác hoá cho a là:

- ☐ $a = \sin\alpha$.
- ☐ $a = \cos2\alpha$
- ☐ $a = tg\alpha$.
- ☐ Khác.

b. Chứng minh rằng:

$$(1-a)^n + (1+a)^n \le 2^n, \forall n \in N \text{ và } n \ge 2.$$

Bài tập 6. Cho $|a| \ge 1$.

a. Lựa chọn việc lượng giác hoá cho a là:

- ☐ $a = \sin\alpha$.
- ☐ $a = tg\alpha$
- ☐ $a = \frac{1}{\sin\alpha}$.
- ☐ $a = \frac{1}{\cos\alpha}$.

b. Chứng minh rằng:

$$-4 \le \frac{5-12\sqrt{a^2-1}}{a^2} \le 9.$$

Bài tập 7. Cho các số a, b, c, d thoả mãn $a^2 + b^2 = 1$ và $c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$|a(c-d) + b(c+d)| \le \sqrt{2}.$$

Bài tập 8. Cho $4a^2 + 9b^2 = 25$. Chứng minh rằng:

$$|6a + 12b| \le 25.$$

Bài tập 9. Cho bất đẳng thức:

$$\left|a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}\right| \le 1.$$

a. Lựa chọn việc lượng giác hoá cho bất đẳng thức là:

☐ $a = \sin\alpha$, $b = \sin\beta$. ☐ $a = tg\alpha$, $b = tg\beta$.

☐ $a = \cos\alpha$, $b = \cos\beta$. ☐ Lựa chọn khác.

b. Chứng minh bất đẳng thức.

Bài tập 10. Cho bất đẳng thức:

$$\left|a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} + \sqrt{3}\left[ab - \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right]\right| \le 2.$$

a. Lựa chọn việc lượng giác hoá cho bất đẳng thức là:

☐ $a = \sin\alpha$, $b = \sin\beta$. ☐ $a = tg\alpha$, $b = tg\beta$.

☐ $a = \cos\alpha$, $b = \cos\beta$. ☐ Lựa chọn khác.

b. Chứng minh bất đẳng thức.

Bài tập 11. Cho x, y thoả mãn $3x + 4y = 7$. Chứng minh rằng:

$$x^2 + y^2 \ge \frac{49}{25}.$$

Bài tập 12. Cho các số a, b, c thoả mãn $0 < c \le a$, $c \le b$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{(a-c)c} + \sqrt{(b-c)c} \le \sqrt{ab}.$$

Bài tập 13. Cho phương trình:

$$4x^3 - 3x = \sqrt{1-x^2}$$

a. Lựa chọn việc lượng giác hoá cho phương trình là:

☐ $x = \sin t$. ☐ $x = \cos t$. ☐ $x = tgt$. ☐ Khác.

b. Phương trình có bao nhiêu nghiệm. Tìm các nghiệm đó.

Bài tập 14. Cho phương trình:

$$1 + \frac{2}{3}\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}.$$

a. Lựa chọn việc lượng giác hoá cho phương trình là:

☐ $x = \sin^2 t$. ☐ $x = \cos^2 t$. ☐ $x = tg^2 t$. ☐ Khác.

b. Giải phương trình.

Bài tập 15. Cho phương trình:

$$x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}.$$

a. Lựa chọn việc lượng giác hoá cho phương trình là:

☐ $x = \sin t$. ☐ $x = \cos t$. ☐ $x = tgt$. ☐ Khác.

b. Giải phương trình.

Bài tập 16. Cho bất phương trình:

$$\frac{1}{1-x^2} > \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - 1.$$

a. Lựa chọn việc lượng giác hoá cho bất phương trình là:

❑ x = sint. ❑ x = cost. ❑ x = tgt. ❑ Khác.

b. Giải bất phương trình.

Bài tập 17. Với a > 0, giải bất phương trình:

$$x + \sqrt{a^2 - x^2} \le a.$$

Bài tập 18. Tìm a để bất phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{a-x} + \sqrt{x+a} > a.$$

Bài tập 19. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + \sqrt{1-y^2} = 1 \\ y + \sqrt{1-x^2} = 1 \end{cases}.$$

a. Lựa chọn việc lượng giác hoá cho hệ phương trình là:

❑ x = sinα, y = sinβ. ❑ x = tgα, y = tgβ.

❑ x = cosα, y = cosβ. ❑ Lựa chọn khác.

b. Giải hệ phương trình.

Bài tập 20. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{2y}{1-y^2} = x \\ \dfrac{2x}{1-x^2} = y \end{cases}.$$

a. Lựa chọn việc lượng giác hoá cho phương trình là:

❑ x = sinα, y = sinβ. ❑ x = tgα, y = tgβ.

❑ x = cosα, y = cosβ. ❑ Lựa chọn khác.

b. Giải hệ phương trình:

III. HƯỚNG DẪN – GIẢI – ĐÁP SỐ

Bài tập 1. Vì $0 < a, b, c < 1$, đặt $a = \cos\alpha$, $b = \cos\beta$, $c = \cos\gamma$, với $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$.

Khi đó, với điều kiện:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \cos2\alpha) + \frac{1}{2}(1 + \cos\beta) + \cos^2\gamma + [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta)].\cos\gamma = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta) + \cos^2\gamma + \cos(\alpha+\beta).\cos\gamma + \cos(\alpha+\beta).\cos\gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow [\cos(\alpha+\beta) + \cos\gamma].[\cos(\alpha-\beta) + \cos\gamma] = 0.$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta) + \cos\gamma = 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos(\pi-\gamma) \Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma = \pi.$$

Khi đó, đẳng thức được biến đổi về dạng:

$$\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma + 1 = \cos\gamma\sqrt{(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)} +$$

$$+ \cos\alpha\sqrt{(1-\beta^2)(1-\gamma^2)} + \cos\beta\sqrt{(1-\gamma^2)(1-\alpha^2)}$$

$\Leftrightarrow \cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma + 1 = \cos\gamma.\sin\alpha.\sin\beta + \cos\alpha.\sin\beta.\sin\gamma + \cos\beta.\sin\alpha.\sin\gamma$

$\Leftrightarrow \cos(\alpha + \beta).\cos\gamma - \sin(\alpha + \beta).\sin\gamma + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha + \beta + \gamma) + 1 = 0$, đúng.

Bài tập 2. Đặt $a = tg\alpha$, $b = tg\beta$, $c = tg\gamma$, với $\alpha, \beta, \gamma \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Từ giả thiết ta có:

$$a + b + c = abc \Leftrightarrow tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = tg\alpha.tg\beta.tg\gamma$$

$$\Leftrightarrow tg\alpha + tg\beta = -(1 - tg\alpha.tg\beta)tg\gamma \Leftrightarrow \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha.tg\beta} = -tg\gamma$$

$$\Leftrightarrow tg(\alpha + \beta) = tg(-\gamma) \Leftrightarrow \alpha + \beta = -\gamma + k\pi \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = k\pi. \quad (2)$$

Khi đó, đẳng thức cần chứng minh được biến đổi về dạng:

$$\frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha} + \frac{3tg\beta - tg^3\beta}{1 - 3tg^2\beta} + \frac{3tg\gamma - tg^3\gamma}{1 - 3tg^2\gamma} = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}.\frac{3tg\beta - tg^3\beta}{1 - 3tg^2\beta}.\frac{3tg\gamma - tg^3\gamma}{1 - 3tg^2\gamma}$$

$$\Leftrightarrow tg3\alpha + tg3\beta + tg3\gamma = tg3\alpha.tg3\beta.tg3\gamma$$

$$\Leftrightarrow tg3\alpha + tg3\beta = -(1 - tg3\alpha.tg3\beta)tg3\gamma \Leftrightarrow \frac{tg3\alpha + tg3\beta}{1 - tg3\alpha.tg3\beta} = -tg3\gamma$$

$$\Leftrightarrow tg(3\alpha + 3\beta) = -tg3\gamma \overset{(2)}{\Leftrightarrow} tg(3k\pi - 3\gamma) = -tg3\gamma \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 3. Đặt $a = tgA$, $b = tgB$, $c = tgC$, với $A, B, C \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Từ giả thiết ta có:

$$tgA.tgB + tgB.tgC + tgC.tgA = 1 \Leftrightarrow A + B + C = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow 2A + 2B + 2C = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \sin(2A + 2B + 2C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(2A + 2B).\cos2C + \cos(2A + 2B).\sin2C = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin2A.\cos2B.\cos2C + \cos2A.\sin2B.\cos2C + \cos2A.\cos2B.\sin2C - \sin2A.\sin2B.\sin2C = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin2A.\cos2B.\cos2C + \cos2A.\sin2B.\cos2C + \cos2A.\cos2B.\sin2C = \sin2A.\sin2B.\sin2C$$

$$\Leftrightarrow tgA.\frac{\cos2B.\cos2C}{\cos^2B\cos^2C} + tgB.\frac{\cos2C.\cos2A}{\cos^2C\cos^2A} + tgC.\frac{\cos2A.\cos2B}{\cos^2A\cos^2B} = 4tgA.tgB.tgC \quad (1)$$

Nhận xét rằng:

$$\frac{\cos2x}{\cos^2x} = \frac{2\cos^2x - 1}{\cos^2x} = 2 - (1 + tg^2x) = 1 - tg^2x.$$

Khi đó, đẳng thức cần chứng minh được biến đổi về dạng:

$$tgA.(1 - tg^2B)(1 - tg^2C) + tgB.(1 - tg^2C)(1 - tg^2A) + tgC.(1 - tg^2A)(1 - tg^2B) = 4tgA.tgB.tgC$$

$$\Leftrightarrow a(1 - b^2)(1 - c^2) + b(1 - c^2)(1 - a^2) + c(1 - a^2)(1 - b^2) = 4abc$$

$$\Leftrightarrow a + b + c + abc(bc + ca + ab) - 4abc = a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2)$$

$$\overset{(*)}{\longleftrightarrow} a + b + c - 3abc = a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2).$$

Bài tập 4. Từ giả thiết ta có:

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1$ và vì $b \neq 0$ do đó $x_1, x_2, x_3 \neq 0$.

Đặt $x = tgA, y = tgB, z = tgC$, với $A, B, C \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Ta có:

$$tgA.tgB + tgB.tgC + tgC.tgA = 1 \Leftrightarrow A + B + C = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow 2A + 2B + 2C = \pi + 2k\pi. \quad (1)$$

Khi đó, đẳng thức cần chứng minh được biến đổi về dạng:

$$(tgA - cotgA)(tgB - cotgB) + (tgB - cotgB)(tgC - cotgC) + (tgC - cotgC)(tgA - cotgA) = 4$$

$$\Leftrightarrow (-2\,cotg2A)(-2\,cotg2B) + (-2cotg2B)(-2cotg2C) + (-2cotg2C)(-2\,cotg2A) = 4$$

$$\Leftrightarrow cotg2A\,cotg2B + cotg2Bcotg2C + cotg2Ccotg2A) = 1$$

$\Leftrightarrow 2A + 2B + 2C = \pi + 2k\pi$, luôn đúng do (1).

Bài tập 5. Từ giả thiết $|a| \le 1$, đặt $a = \cos2\alpha, \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Khi đó:

$$VT = (1 - \cos2\alpha)^n + (1 + \cos2\alpha)^n = 2^n.\sin^n\alpha + 2^n.\cos^n\alpha = 2^n.(\sin^n\alpha + \cos^n\alpha)$$

$$\le 2^n.(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 2^n = VP.$$

Bài tập 6. Với giả thiết $|a| \ge 1$, đặt $a = \frac{1}{\cos\alpha}$, với $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$.

Khi đó, bất đẳng thức được biến đổi về dạng:

$$-4a^2 \le 5 - 12\sqrt{a^2-1} \le 9a^2 \Leftrightarrow -\frac{4}{\cos^2\alpha} \le 5 - 12\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} \le \frac{9}{\cos^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow -4(tg^2\alpha + 1) \le 5 - 12tg\alpha \le 9(tg^2\alpha + 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4tg^2\alpha - 12tg\alpha + 9 \ge 0 \\ 9tg^2\alpha + 12tg\alpha + 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2tg\alpha - 3)^2 \ge 0 \\ (3tg\alpha + 2)^2 \ge 0 \end{cases}, \text{ luôn đúng.}$$

Bài tập 7. Từ giả thiết:

$a^2 + b^2 = 1$, đặt $a = \sin\alpha$ và $b = \cos\alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi)$.

$c^2 + d^2 = 1$, đặt $c = \sin\beta$ và $d = \cos\beta$, $\beta \in [0, 2\pi)$.

Khi đó:

$$|a(c - d) + b(c + d)| = |(\sin\beta + \cos\beta).\sin\alpha + (\sin\beta - \cos\beta).\cos\alpha|$$

$$= \sqrt{2}\,|\sin\alpha.\cos(\beta - \frac{\pi}{4}) + \cos\alpha.\sin(\beta - \frac{\pi}{4})|$$

$$= \sqrt{2}\,|\sin(\alpha + \beta - \frac{\pi}{4})| \le \sqrt{2} \text{ dpcm.}$$

Bài tập 8. Biến đổi giả thiết về dạng:

$$\left(\frac{2a}{5}\right)^2 + \left(\frac{3b}{5}\right)^2 = 1,$$

Đặt $\frac{2a}{5} = \sin\alpha$ và $\frac{3b}{5} = \cos\alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Khi đó, bất đẳng thức được biến đổi về dạng:

$$|15\sin\alpha + 20\cos\alpha| \le 25 \Leftrightarrow |3\sin\alpha + 4\cos\alpha| \le 5$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{3}{5}\sin\alpha + \frac{4}{5}\cos\alpha\right| \le 1. \qquad (*)$$

Vì $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ nên tồn tại góc $\beta \in [0, 2\pi)$ sao cho $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$, khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow |\cos\beta.\sin\alpha + \sin\beta.\cos\alpha| \le 1 \Leftrightarrow |\sin(\alpha+\beta)| \le 1, \text{ luôn đúng.}$$

Bài tập 9. *Hướng dẫn*: Đặt $a = \sin\alpha$, $b = \sin\beta$ ta biến đổi được bất đẳng thức về dạng $|\sin(\alpha - \beta)| \le 1$, luôn đúng.

Bài tập 10. Điều kiện :

$$\begin{cases} 1 - a^2 \ge 0 \\ 1 - b^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| \le 1 \\ |b| \le 1 \end{cases}.$$

Đặt $a = \sin\alpha$, $b = \sin\beta$, với $\alpha, \beta \in [0, \pi]$.

Khi đó, bất đẳng thức được biến đổi về dạng:

$$|\sin\alpha.\sqrt{1-\sin^2\beta} + \sin\beta.\sqrt{1-\sin^2\alpha} +$$

$$+ \sqrt{3}\,[\,\sin\alpha.\sin\beta - \sqrt{(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)}\,| \le 2$$

$$\Leftrightarrow |\sin\alpha.\cos\beta + \sin\beta.\cos\alpha + \sqrt{3}(\sin\alpha.\sin\beta - \cos\alpha.\cos\beta)| \le 2$$

$$\Leftrightarrow |\sin(\alpha+\beta) - \sqrt{3}\cos(\alpha+\beta)| \le 2 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\alpha+\beta)\right| \le 1$$

$$\Leftrightarrow |\sin(\alpha + \beta - \frac{\pi}{3})| \le 1, \text{ luôn đúng.}$$

Bài tập 11. Từ giả thiết:

$$7 = 3x + 4y = 5\sqrt{x^2+y^2}\left[\frac{3}{5}.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{4}{5}.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]. \qquad (1)$$

Nhận xét rằng :

- Vì $(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2 = 1$, đặt $\frac{3}{5} = \sin\alpha$ và $\frac{4}{5} = \cos\alpha$, với $\alpha \in [0, 2\tau)$.
- Vì $(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})^2 + (\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})^2 = 1$, đặt:

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\beta \text{ và } \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\beta, \text{ với } \beta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Khi đó (1) được chuyển về dạng:

$$7 = 5\sqrt{x^2+y^2}.(\sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta) = 5\sqrt{x^2+y^2}.\sin(\alpha+\beta) \le 5\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \ge \frac{7}{5} \Leftrightarrow x^2 + y^2 \ge \frac{49}{25} \text{ đpcm.}$$

Bài tập 12. Từ giả thiết ta biến đổi bất đẳng thức về dạng:

$$\sqrt{\frac{a-c}{a}.\frac{c}{b}} + \sqrt{\frac{b-c}{b}.\frac{c}{a}} \le \sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{(1-\frac{c}{a}).\frac{c}{b}} + \sqrt{(1-\frac{c}{b})\frac{c}{a}} \le 1.$$

Nhận xét rằng :

- $(1-\frac{c}{a})+\frac{c}{a}=1$, đặt $1-\frac{c}{a}=\sin^2\alpha$ và $\frac{c}{a}=\cos^2\alpha$, với $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

  $(1-\frac{c}{b})+\frac{c}{b}=1$, đặt $1-\frac{c}{b}=\sin^2\beta$ và $\frac{c}{b}=\cos^2\beta$, với $\beta\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

Khi đó bất đẳng thức được chuyển về dạng :

$$\sqrt{\sin^2\alpha.\cos^2\beta} + \sqrt{\cos^2\alpha.\sin^2\beta} \le 1 \Leftrightarrow \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta \le 1$$

$\Leftrightarrow \sin(\alpha+\beta)\le 1$ luôn đúng.

Bài tập 13. Điều kiện:

$1-x^2\ge 0 \Leftrightarrow |x|\le 1.$ (*)

Với điều kiện (*), đặt $x=\cos t$, $t\in[0,\pi]$. (**)

Khi đó phương trình được chuyển về dạng:

$$4\cos^3t-3\cos t=\sqrt{1-\cos^2t} \Leftrightarrow \cos3t=|\sin t|$$

$$\overset{(**)}{\Leftrightarrow} \cos3t=\sin t \Leftrightarrow \cos3t=\cos(\frac{\pi}{2}-t)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3t=\frac{\pi}{2}-t+2k\pi \\ 3t=-\frac{\pi}{2}+t+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \\ t=-\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. \overset{(**)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{8} \\ t=\frac{5\pi}{8} \\ t=\frac{3\pi}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\cos\frac{\pi}{8} \\ x=\cos\frac{5\pi}{8} \\ x=\cos\frac{3\pi}{4} \end{array}\right., k\in Z.$$

Vậy, phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Bài tập 14. Điều kiện

$$\begin{cases} x-x^2\ge 0 \\ x\ge 0 \\ 1-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le 1. \quad (*)$$

Với điều kiện (*), đặt $x=\cos^2t$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$. (**)

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$1+\frac{2}{3}\sqrt{\cos^2t-\cos^4t}=\sqrt{\cos^2t}+\sqrt{1-\cos^2t}$$

$$\Leftrightarrow 3+2|\sin t.\cos t|=|\cos t|+|\sin t| \Leftrightarrow 3+2\sin t.\cos t=3(\cos t+\sin t)$$

Đặt $\sin t+\cos t=u$, điều kiện $1\le u\le\sqrt{2}$, suy ra $\sin t.\cos t=\frac{u^2-1}{2}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$3+u^2-1=3u \Leftrightarrow u^2-3u+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1 \\ u=2\ (l) \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin t+\cos t=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \sin(t + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2k\pi \\ t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right. \overset{(**)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \cos^2 0 = 1 \\ x = \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0 \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Bài tập 15. Điều kiện

$$1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1. \quad (1)$$

Đặt $x = \sin t$ với $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$\sin^3 t + \sqrt{(1-\sin^2 t)^3} = \sin t.\sqrt{2(1-\sin^2 t)} \Leftrightarrow \sin^3 t + \cos^3 t = \sqrt{2}\sin t.\cos t$$

$$\Leftrightarrow (\sin t + \cos t)^3 - 3(\sin t + \cos t).\sin t.\cos t = \sqrt{2}\sin t.\cos t$$

Đặt $y = \sin t + \cos t$, điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$, suy ra $\sin t.\cos t = \frac{y^2-1}{2}$.

Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:

$$y^3 - 3.\frac{y^2-1}{2}.y = \sqrt{2}.\frac{y^2-1}{2} \Leftrightarrow y^3 + y^2\sqrt{2} - 3y - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - \sqrt{2})(y^2 + 2y\sqrt{2} + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{2} \\ y = 1 - \sqrt{2} \end{array}\right.$$

- Với $y = \sqrt{2}$, ta được:

$$\sin t + \cos t = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin(t + \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Với $y = 1 - \sqrt{2}$, ta được:

$$\sin t + \cos t = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow x + \sqrt{1-x^2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 - \sqrt{2} - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{2} - x \geq 0 \\ 1 - x^2 = (1 - \sqrt{2} - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 - \sqrt{2} \\ x^2 - (1-\sqrt{2})x + 1 - \sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 - \sqrt{2} \\ x = \dfrac{1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm.

Bài tập 16. *Hướng dẫn*: Đặt $x = \cos t$, $t \in [0, \pi]$.

Bài tập 17. Điều kiện

$$a^2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq a.$$

Đặt $x = a.\cos t$, với $t \in [0, \pi]$.

Khi đó, bất phương trình có dạng:

$$a.\cos t + a.\sin t \le a \Leftrightarrow \cos t + \sin t \le 1 \Leftrightarrow \cos(t - \frac{\pi}{4}) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} \le t \le \pi \\ t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le \cos t \le 0 \\ \cos t = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -a \le a.\cos t \le 0 \\ a.\cos t = a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -a \le x \le 0 \\ x = a \end{array}\right..$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $-a \le x \le 0$ hoặc $x = a$.

Bài tập 18. Điều kiện:

$$\begin{cases} a \ge 0 \\ a - x \ge 0 \\ x + a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ -a \le x \le a \end{cases} \qquad (*)$$

Với điều kiện (*), đặt $x = a\cos t$, $t \in [0, \pi]$. (**)

Khi đó, bất phương trình được chuyển về dạng :

$$\sqrt{a - a.\cos t} + \sqrt{a + a.\cos t} > a \Leftrightarrow \sqrt{2a}\,(\sin\frac{t}{2} + \cos\frac{t}{2}) > a$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}) > \sqrt{a} \Leftrightarrow \cos(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}) > \frac{\sqrt{a}}{2}.$$

Từ (**), ta được:

$$-\frac{\pi}{4} \le \frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}) \le 1.$$

Vậy, để bất phương trình có nghiệm điều kiện là $\frac{\sqrt{a}}{2} < 1 \Leftrightarrow a < 4$.

Bài tập 19. *Hướng dẫn*: Điều kiện: $|x|, |y| \le 1$.

Đặt $x = \sin\alpha$, $y = \sin\beta$ ta tìm được hai cặp nghiệm (0, 0), (1, 1).

Bài tập 20. Điều kiện $x, y \ne \pm 1$.

Đặt $x = tg\alpha$, $y = tg\beta$, với $\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{\pm\frac{\pi}{4}\}$.

Khi đó, hệ được chuyển về dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{2tg\beta}{1 - tg^2\beta} = tg\alpha \\ \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = tg\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg2\beta = tg\alpha \\ tg2\alpha = tg\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta = \alpha + k\pi \\ 2\alpha = \beta + l\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{k\pi + 2l\pi}{3} \\ \beta = \dfrac{2k\pi + l\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = tg\dfrac{k\pi + 2l\pi}{3} \\ y = tg\dfrac{2k\pi + l\pi}{3} \end{cases} \overset{k,l \in Z}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x = \sqrt{3}\ \&\ y = -\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3}\ \&\ y = \sqrt{3} \end{array}\right..$$

Vậy hệ có 3 cặp nghiệm.

MỤC LỤC

CHƯƠNG I
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

CHƯƠNG II

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9724770. Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập: QUỐC TRUNG

Trình bày bìa: THÁI VĂN

TOÁN NÂNG CAO TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM LƯỢNG GIÁC 11

Mã số: 1L - 12ĐH2007
In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao Bì Phong Tân - TP. Hồ Chí Minh.
Số xuất bản: 868 - 2006/CXB/10 – 180/ĐHQGHN, ngày 17/11/2006.
Quyết định xuất bản số: 28 LK/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2006.